Notas técnicas de microeconomía

Cristián Troncoso Valverde

2004

Índice general

NOTAS TÉCNICAS DE MICROECONOMÍA

Cristián Troncoso–Valverde[1]

Introducción

El objetivo de estos apuntes es presentar, de manera breve, algunos tópicos sobre monopolio y competencia imperfecta. El primer capítulo es dedicado al análisis del monopolio débil y fuerte con particular énfasis en los efectos sobre el bienestar y la eficiencia que esta estructura de mercado impone en la economía. El capítulo 2 analiza, de manera simple e introductoria, algunos conceptos sobre teoría de juegos. Los tópicos cubiertos en este capítulo solo pretenden entregar a los alumnos una visión simple de aquellas herramientas consideradas esenciales en el análisis microeconómico moderno. Por esta razón, el grado de complejidad en la exposición es deliberadamente simple. Por último, el capítulo 3 es dedicado al análisis de las teorías tradicionales de oligopolio uniperiodo, haciendo para ello uso de las herramientas discutidas en el capítulo 2.

Como el objetivo primario de estas notas es entregar una visión general sobre los temas de monopolio y oligopolio, este documento debe ser considerado como complementario a las lecturas asignadas a cada uno de estos tópicos en el respectivo syllabus del curso de Microeconomía. No obstante, al final de estas notas se incluye una sección bibliográfica con artículos y libros que permiten profundizar los tópicos antes señalados.

En la elaboración de este documento se utilizaron diversos textos de microeconomía (debidamente citados) junto con apuntes personales del autor. Sin embargo, cualquier error contenido en este documento es, por cierto, la sola responsabilidad del autor.

[1]Ingeniero Comercial (Universidad de Talca) y Master of Arts in Economics (Concordia University). Profesor Escuela de Ingeniería Comercial, Facultad de Ciencias Empresariales, Universidad de Talca. 2 Norte 685, Casilla 721, Talca, Chile. E–mail: ctroncos@utalca.cl.

Capítulo 1: Monopolio y poder de mercado

En general se entiende como monopólio puro a aquel mercado donde existe solo un vendedor y muchos compradores de un determinado bien. Este definición de monopolio corresponde a lo que conocemos como monopolio de venta. Si, por el contrario, estamos en presencia de un mercado donde existe un solo comprador de un determinado bien, entonces hablamos de monopolio de compra o *monopsonio*. Si el mercado esta compuesto por un solo vendedor, quien a la vez es el único comprador de un determinado factor productivo, entonces hablamos de monopolio bilateral. En general, la teoría de monopolio que desarrollaremos a continuación puede ser extendida a cualquier mercado donde las empresas gozan de cierto *poder de mercado*. El hecho de analizar una industria con una única firma es sólo con el objeto de simplificar el análisis y recalcar las diferencias existentes entre monopolio y competencia perfecta. Como veremos más adelante, si situamos a los distintos tipos de organizaciones industriales en un continuo, en general se estila asumir que el modelo de competencia perfecta estaría ubicado en un extremo y el modelo de monopolio puro en el otro, encontrando todas las formas de competencia imperfecta entre estos dos extremos. Sin embargo, como aclararemos más adelante, esta analogía no es del todo correcta.

A diferencia del modelo de competencia perfecta, en monopolio existe una sola empresa capaz de abastecer todo el mercado. Por lo tanto, esta única empresa enfrenta toda la demanda de mercado, razón por la cual este monopolista no puede simplemente asumir que el precio es un dato al momento de tomar sus decisiones de producción. Claramente, si el monopolista decide incrementar su producción, entonces el precio de mercado deberá descender. Así, el problema al que se ve enfrentado el monopolista es determinar que cantidad debe producir, a fin de maximizar sus utilidades. Alternativamente, podemos plantear el problema del monopolista en términos del precio a cobrar en el mercado. La diferencia radica en que en el primer caso (cuando la variable de decisión es la cantidad) el precio de mercado será derivado a partir de la curva de demanda; en el segundo caso (cuando el precio es la variable de decisión) será la cantidad la que se determine via curva de demanda. Si el problema se define en términos de la cantidad, entonces tenemos que:

$$\text{Problema:} \qquad \max_{q \in Q} \pi(q) = P(q)q - C(q) \tag{1.1}$$

donde Q es el set de producción del monopolista, q es la cantidad producida por el monopolista y $P(q)$ es la función de demanda del mercado[1]. Similarmente, al plantear el problema del monopolista en términos del precio, tenemos que:

$$\text{Problema:} \qquad \max_{p \geqslant 0} \pi(p) = Pq(p) - C[q(p)] \tag{1.2}$$

donde p es el precio cobrado por el monopolista y $q(p)$ es la función de inversa de demanda del mercado.

1.1. Ingreso total, marginal y medio

Dado que el monopolista enfrenta toda la curva de demanda del mercado su ingreso marginal no es igual al precio que percibe por cada unidad adicional que vende. Cuando el monopolista decide vender una unidad adicional, su ingreso total varía pro dos motivos:

1. Su ingreso total **aumenta** producto del ingreso extra generado por la venta de esta unidad extra;

2. Su ingreso total **disminuye** producto de la disminución en el precio necesaria para inducir la venta de una unidad adicional.

Por ejemplo, suponga que la curva de demanda del mercado viene dada por $P(q) = 6 - q$.

Precio (1)	Cantidad (2)	Ing. Total (3)=(1)*(2)	Ing. Medio (4)=(3)/(2)	Ing. Marginal (5) = Δ(3)	Elasticidad–precio $\frac{\Delta(3)}{\Delta(1)}\frac{(1)}{(2)}$
6	0	0	-	-	-
5	1	5	5	5	-5
4	2	8	4	3	-2
3	3	9	3	1	-1
2	4	8	2	-1	-0.5
1	5	5	1	-3	-0.2

[1]En lo que resta de estas notas, asumiremos que $\frac{\delta P(q)}{\delta q} < 0$.

Observe que sucede cuando el monopolista desea vender, por ejemplo, la unidad número 2:

1. El precio necesario para que la unidad nro. 2 pueda venderse debe reducirse de \$5 a \$4 por unidad. Producto de esta baja en el precio, el **Ingreso Total** (IT) disminuye en \$1 ($I_1 = 1 * 5 = 5$; $I_2 = 1 * 4 = 4$);

2. Producto de la venta de una unidad adicional, el IT aumenta en \$4 (la segunda unidad vendida a \$4);

3. El **Ingreso Marginal** (Img) producto de la venta de la unidad nro. 2 es \$4 - \$1=\$3.

Observe que el **Ingreso Medio** (Ime) del monopolista corresponde a la curva de demanda que éste enfrenta. De la misma forma, para una demanda con pendiente negativa (como la del ejemplo anterior), el Img del monopolista es menor que el precio y en el caso particular de una demanda lineal, el ingreso total del monopolista se maximiza cuando la elasticidad–precio de la demanda es igual a uno[2]. Así, tenemos que,

$$IT = P(q)q \tag{1.3}$$

$$Ime = \frac{P(q)q}{q} = \frac{IT}{q} = P(q) \tag{1.4}$$

$$Img = \frac{\delta IT}{\delta q} = P(q) + \frac{\delta P(q)}{\delta q}q \tag{1.5}$$

$$= \text{Efecto Directo}(P(q)) \quad + \quad \text{Efecto Indirecto}(\frac{\delta P(q)}{\delta q}q) \tag{1.6}$$

1.2. Maximización del beneficio del monopolista

Como ya lo hemos discutido, el problema del monopolista es maximizar su beneficio sujeto a las restricciones impuestas por la demanda que enfrenta y la estructura de costos. La condición de primer orden para el problema en (1.1) es,

$$\frac{\delta \pi(q)}{\delta q} = \left(P(q) + \frac{\delta P(q)}{\delta q}q\right) - \frac{\delta C(q)}{\delta q} = 0 \tag{1.7}$$

$$\tag{1.8}$$

[2]En general esto es válido sólo para el caso de una demanda lineal.

Observe que el primer término (entre paréntesis) en (1.7) corresponde al Img del monopolista, mientras que el segundo es simplemente su costo marginal (Cmg). Multiplicando (1.7) por $1 = \frac{P(q)}{P(q)}$ y reordenando términos obtenemos:

$$P(q)\left[1 + \frac{\delta P(q)}{\delta q}\frac{q}{P}\right] = \frac{\delta C(q)}{\delta q} \tag{1.9}$$

Defina ϵ como la elasticidad–precio de la demanda. Entonces (1.9) puede reescribirse como:

$$P(q)\left[1 + \frac{1}{\epsilon}\right] = \frac{\delta C(q)}{\delta q} \tag{1.10}$$

(1.10) corresponde a la condición de óptimo del monopolista, es decir, a la condición que asegura la obtención de máximo beneficio. Sin embargo, (1.10) es una condición necesaria, pero no suficiente. Una condición suficiente para maximizar beneficios vine dada por

$$\frac{\delta^2 \pi(q)}{\delta q^2} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{\delta Img}{\delta q} \leqslant \frac{\delta Cmg}{\delta q} \tag{1.11}$$

es decir, la función de costo marginal debe cortar a la función de ingreso marginal desde *abajo*[3].

1.3. El costo social del monopolio

Sabemos que en un mercado competitivo, en el óptimo, el precio recibido por el productor individual es igual a su costo marginal. Sin embargo, bajo monopolio el precio será mayor al costo marginal de producción. Para ver esto, recuerde que la condición de primer order para la maximización del beneficio del monopolista es $P(q)\left[1 + \frac{1}{\epsilon}\right] = \frac{\delta C(q)}{\delta q}$, la cual puede ser reescrita como $P(q) = \frac{\delta C(q)}{\delta q} M$, donde $M = 1/\left[1 + \frac{1}{\epsilon}\right]$. Por lo tanto, si $\epsilon \geqslant 1$ entonces $P(q) \geqslant Cmg$. Luego, al comparar monopolio con competencia perfecta, se observa que el monopolista produce una cantidad menor y cobra un precio mayor que las correspondientes cantidad y precio vigentes en competencia perfecta.

[3] En estricto rigor, la condición de segundo orden para la maximización de beneficio exige que $\frac{\delta^2 P(q)}{\delta q^2} q + 2\frac{\delta P(q)}{\delta q} \leqslant \frac{\delta^2 C(q)}{\delta q^2}$.

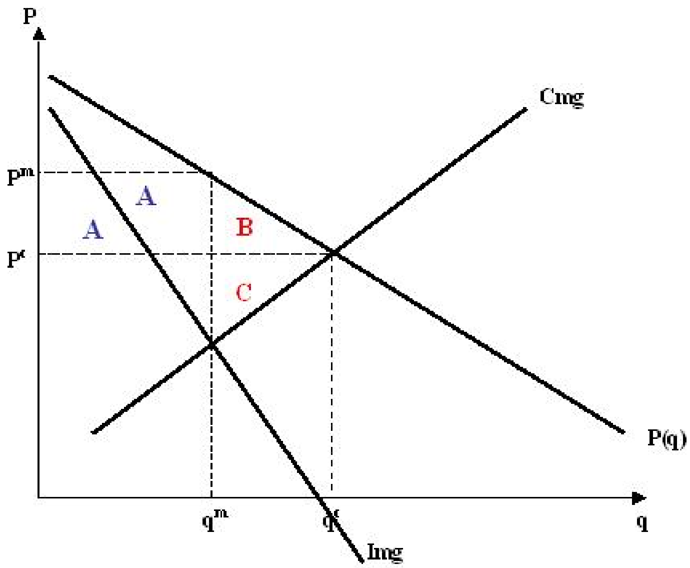

Figura 1.1: Costo social del monopolio

En términos del bienestar agregado de la sociedad, observamos que, desde el punto de vista del consumidor, para la cantidad q^m, en monopolio el precio a pagar será p_m, mientras que bajo competencia perfecta el consumidor solo pagaría p_c. Por lo tanto, los consumidores pierden como excedente el área A. Asimismo, si el mercado fuese competitivo, el precio vigente sería p_c y la cantidad tranzada q_c. Sin embargo, bajo monopolio la cantidad tranzada se reduce a q_m y por tanto, los consumidores dejan de ganar el área B en términos de excedente. Ahora bien, desde el punto de vista del productor, si el mercado fuese competitivo, éste percibiría como precio por la cantidad q_m, p_c. No obstante, bajo monopolio el productor percibe $p_m > p_c$. Luego, gana en términos de excedente el área A. Bajo competencia perfecta, el productor podría vender $q_c > q_m$, pero bajo monopolio el productor sólo vende q_m y deja de ganar $(q_c - q_m)p_c - \int_{q_m}^{q_c} Cmg(q)dq$ (el área C del gráfico) en términos de excedente. Por lo tanto, podemos concluir que:

a) El área B corresponde a una **transferencia** de excedente de parte del consumidor al productor;

b) En conjunto, consumidores y productores pierden $B + C$ (B por parte de los consumidores y C por parte de los productores). De esta forma, el costo social del monopolio equivale a la suma de las áreas B y C.

El área B+C se denomina **costo social provocado por el monopolio** o **pérdida irrecuperable de eficiencia** producto del monopolio.

1.4. Poder de mercado

Para el monopolio, el hecho de ser la única empresa en el mercado implica que esta empresa enfrenta toda la demanda. Sabemos que el monopolista determinará la cantidad óptima a producir de acuerdo a la siguiente condición[4]:

$$P(q)\left[1+\frac{1}{\epsilon}\right]=\frac{\delta C(q)}{\delta q}$$

donde ϵ corresponde a la elasticidad–precio de la demanda de mercado. Reordenando (1.10),

$$P(q)=\frac{Cmg}{\left[1+\frac{1}{\epsilon}\right]}$$

Observe que la diferencia fundamental entre competencia perfecta y monopolio (débil) puro, en términos de la condición de óptimo es el factor $M=\left[1+\frac{1}{\epsilon}\right]$. Si $\epsilon\rightarrow\infty$, $P(q)\rightarrow Cmg$. Además, a medida que el monopolista enfrenta una demanda más inelástica, la diferencia entre el precio que cobra y su costo marginal aumenta. En este sentido, el factor M representa en cierta manera el grado de **poder de mercado** que la empresa puede ejercer. En general, este mismo análisis aplica para aquellas situaciones en donde existe más de una empresa, pero cada una de ellas posee cierto grado de poder de mercado. La condición de optimalidad para la empresa i–ésima será:

$$P(q)=\frac{Cmg}{\left[1+\frac{1}{\epsilon_i}\right]}$$

donde ϵ_i es la elasticidad–precio de la demanda que **cada** empresa enfrenta. Note que existe una sola empresa entonces $\epsilon_i=\epsilon$, i.e., el equilibrio de un monopolista puro; cuando $\epsilon_i\rightarrow\infty$ estamos

[4]En lo que resta de estas notas supondremos que la condición (1.11) es siempre satisfecha. Por lo tanto (1.7) se transforma en una condición necesaria y suficiente para la maximización de beneficios del monopolista.

en competencia perfecta. Así, aunque la empresa i–ésima no sea un monopolista puro, el solo hecho de enfrentar una demanda con pendiente negativa (distinta de ∞) le otorga cierto grado de poder de mercado, pues para esta empresa es siempre en su propio beneficio cobrar un precio mayor al Cmg. Una útil medida del grado de poder de mercado ejercido por una determinada empresa es el *índice de Lerner*. Este índice se define como:

$$L = \frac{P - Cmg}{P} \tag{1.12}$$

donde $0 \leqslant L \leqslant 1$. Utilizando la condición de óptimo, podemos decir que

$$L = \frac{P - Cmg}{P} = -\frac{1}{\epsilon_i} \tag{1.13}$$

En las notas dedicadas a teoría de oligopolio se retomará este índice.

1.5. Discriminación de precios

A diferencia de un mercado perfecto, el monopolista puede influir sobre el precio que cobra dependiendo de la cantidad que escoja ofrecer. Esta *influencia* es lo que se define como **poder de mercado** y le permite al monopolista obtener beneficios extras que no pueden ser obtenidos bajo una estructura de mercado competitiva[5]. El modelo de monopolio hasta ahora analizado recibe el nombre de monopolio débil, puesto que el monopolista solo puede cobrar una tarifa lineal por su producto, es decir, solo puede diseñar mecanismos del tipo (p^m, q^m). Sin embargo, si al monopolista se le permite diseñar mecanismos más complejos como por ejemplo, tarificación no lineal o distintos precios a distintos consumidores, este monopolista podrá ejercer de mejor manera su poder de mercado y por ende, transformar parte o todo el excedente del consumidor en renta económica. Este monopolista se conoce como monopolista fuerte[6]. Un monopolista fuerte puede **discriminar en precios**, es decir, ofrecer distintos esquemas de precio y cantidad al mercado. La discriminación de precios tiene por objetivo apropiarse de parte o de todo el excedente del consumidor de manera de incrementar el beneficio total del monopolista. Básicamente

[5] Los lectores interesados en este tema pueden revisar el libro The theory of Industrial Organization de Tirole (1988).

[6] Para una clara y detallada exposición sobre este tema, vea Wolfstetter (1999).

existen tres formas de discriminación de precios: perfecta (o de primer grado), de segundo y de tercer grado. En general, el tipo (o grado) de discriminación practicada por el monopolista fuerte dependerá de la cantidad y calidad de la información que éste posea con respecto al mercado que atiende.

1.5.1. Discriminación de primer grado

Supongamos que el monopolista posee suficiente información referente a sus consumidores de manera tal que conoce el precio de reserva de todos y cada uno de estos consumidores. De esta forma, el monopolista podría cobrar el precio de reserva más alto por la primera unidad vendida, el segundo más alto por la segunda unidad vendida, el tercero por la tercera unidad y así sucesivamente. Si observamos detenidamente, bajo discriminación perfecta de precios el monopolista debe cobrar un precio menor si desea vender una unidad extra, pero ahora no es necesario que cobre este menor precio por **todas** las unidades anteriormente vendidas. En otras palabras, bajo discriminación perfecta el monopolista percibe como ingreso marginal el precio de reserva por cada unidad extra que él vende. ¿Cómo queda entonces la condición de máximo beneficio para el monopolista discriminador de primer grado? Dado que ahora él recibe como ingreso adicional por cada unidad vendida el precio, la condición de óptimo se transforma en $P = Cmg$. Esta situación es graficada en la Figura 1.2.

La solución a la cual llega el monopolista cuando decide (y puede) practicar discriminación de precios de primer grado es la misma a la cual se llegaría si el mercado fuese un mercado perfectamente competitivo. Pero esta solución se ha alcanzado de forma distinta a como ocurre bajo competencia perfecta. El monopolista ha cobrado el máximo precio a pagar por cada unidad consumida, de forma tal que él se ha apropiado de todo el excedente que los consumidores gozarían si el mercado fuera perfecto. Ahora el monopolista goza de beneficios iguales a toda el área comprendida bajo la curva de demanda y sobre la curva de costo marginal, los cuales son mayores a los obtenidos cobrando un solo precio. En términos del costo social producto de este monopolio discriminador, no existe pérdida social sino que solo una transferencia de excedente desde los consumidores hacia el productor.

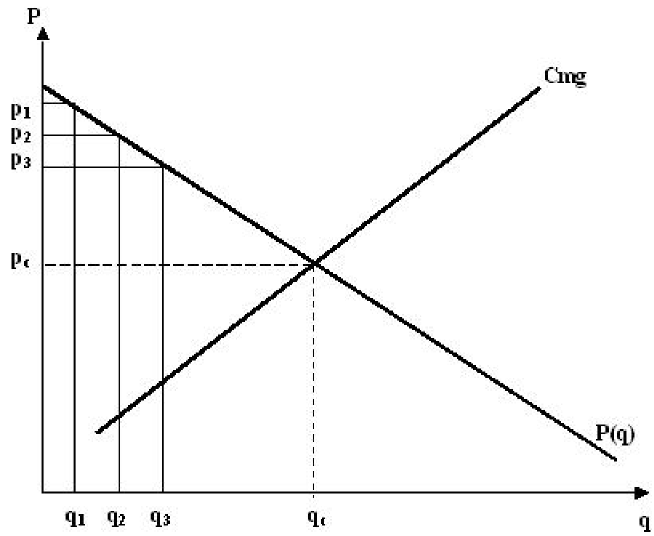

Figura 1.2: Discriminación de primer grado

1.5.2. Discriminación de segundo grado

Cuando el monopolista no posee información suficiente para conocer los distintos precios de reserva de sus consumidores, puede intentar *agrupar* a aquellos consumidores que estén dispuestos a pagar un único precio por una determinada cantidad del bien. Así por ejemplo, el monopolista podría poseer información suficiente para fijar un precio de $ 1000 por las primeras 10 unidades; $ 500 por las unidades entre la número 11 y la 30 y $ 450 por las unidades entre la número 31 y la 60. De esta manera el monopolista, aunque no está cobrando cada precio de reserva por cada unidad que vende, discrimina entre sus consumidores de acuerdo a la cantidad que ellos consumen y también se apropia de parte su excedente. Este tipo de discriminación se conoce como discriminación de segundo grado. El ejemplo clásico de este tipo de discriminación dice relación con los precios cobrados por la compañía local de electricidad. Supongamos que esta empresa posee costos medios decrecientes. Ella gozará de costos menores a medida que aumente la cantidad producida, por lo que parte de esta baja en los costos puede ser transferida a los consumidores.

En la figura 1.3 se han identificado los puntos de equilibrio sin discriminacin (p_m, q_m) así como los distintos bloques de consumo. Aquí, el monopolista cobra tres precios distintos basados en la

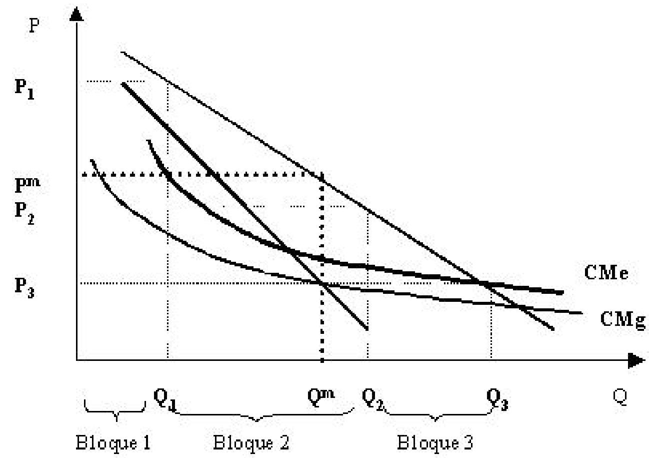

Figura 1.3: Discriminación de segundo grado

cantidad comprada. En general, bajo discriminación de segundo grado, el precio por unidad varía con el número de unidades compradas, pero todos los consumidores están sujetos a la misma función no lineal de precios (Wolfstetter, 1999). La gran popularidad de este método radica en la poca información que el monopolista necesita para practicarla. El monopolista no necesita de información detallada sobre la dispocisón máxima a pagar de los consumidores, pues él solo diseña mecanismos de la forma $\{(p_1, q_1); (p_2, q_2); \ldots ; (p_i, q_i)\}$ y espera a que los consumidores escojan aquel que ellos prefieran, es decir, diseña mecanismos tal que los consumidores revelen su tipo.

1.5.3. Discriminación de tercer grado

¿Qué sucede si el monopolista no posee suficiente información sobre sus consumidores para practicar discriminación perfecta, pero mayor información que la requerida por discriminación de segundo grado? Supongamos que el monopolista solo sabe que existen dos grupos de consumidores, los consumidores tipo A y los consumidores tipo B. Si efectivamente ambos grupos están compuestos por distinto tipo de consumidores, entonces las curvas de demandas de cada grupo serán distintas (piense en un grupo formado por estudiantes y el otro por no–estudiantes). Supongamos además que la demanda del grupo A es menos sensible al precio que la demanda del grupo B. El monopolista tiene dos alternativas posibles: i) cobra un único precio en ambos mercados o, ii) cobra dos precios distintos, uno para cada mercado. Si el monopolista decide cobrar un solo precio, es decir, no practica discriminacin de precios alguna, tenemos que el ingreso marginal obtenido en el mercado B sería mayor al obtenido en el mercado A, es decir, el ingreso marginal sería mayor en aquel mercado que posea la demanda es más elástica.

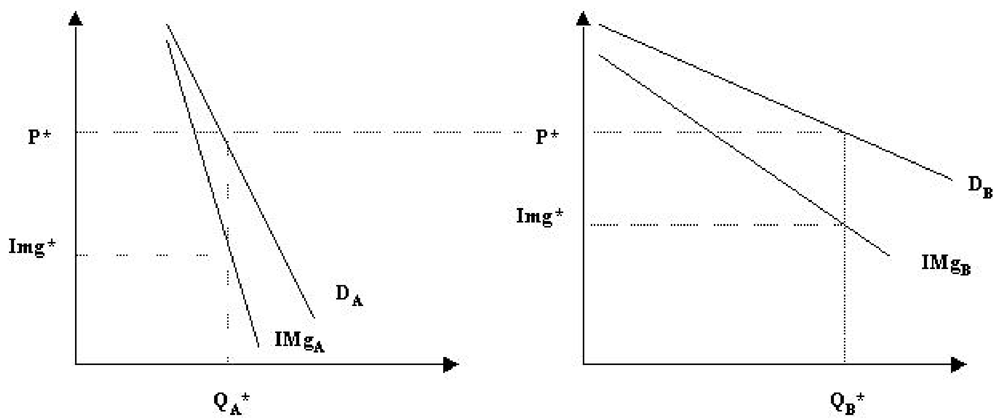

Figura 1.4: Discriminación de tercer grado

De esta forma, el monopolista tiene incentivos a traspasar producción desde el Mercado A hacia el B y de esta forma obtener mayores ingresos (dado que el $IMg_a < IMg_b$). Estos incentivos (a traspasar producción de un mercado hacia el otro) desaparecerán solo cuando el IMg_a se iguale al IMg_b. la nueva situación será:

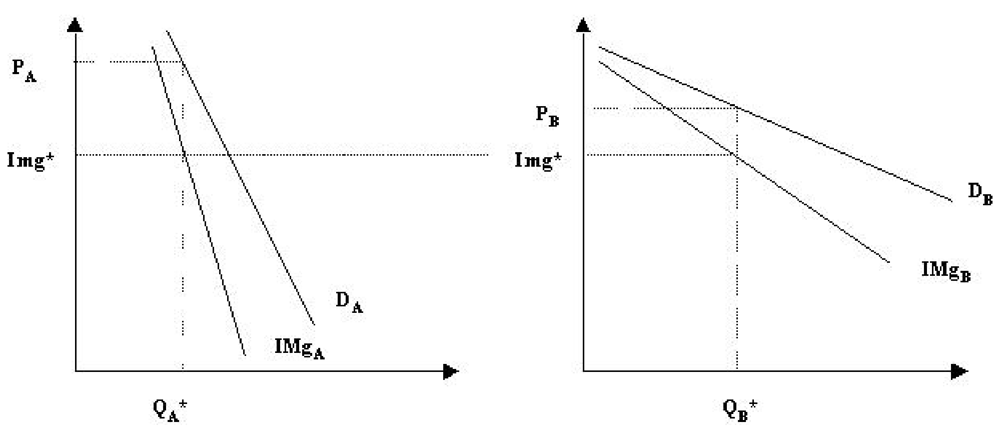

Figura 1.5: Discriminación de tercer grado

Cuando el **ingreso marginal** del mercado A es igual al **ingreso marginal** del mercado B, el monopolista obtiene como resultado que el precio a cobrar en el primer mercado (mercado A) debe ser mayor al precio cobrado en el segundo mercado (mercado B). En general, el monopolista que practica discriminación de precios de tercer grado cobrará un precio mayor en el mercado que posea la demanda menos elástica y un precio menor en el que posea una demanda más elástica. Intuitivamente, los consumidores que pertenecen al mercado con demanda más elástica reaccionan disminuyendo la cantidad consumida de forma mucho más drástica que aquellos que no pueden sustituir el bien (aquellos con demanda menos elástica). Por ejemplo, analice el caso del valor de las suscripciones a revistas especializadas en negocios. El valor cobrado a las bibliotecas es mucho mayor al cobrado al público en general, puesto que para las bibliotecas es *necesario* contar con los números de estas publicaciones. Sin embargo, para el público no especializado en negocios existe la posibilidad de revisar la revista en la biblioteca, por lo cual, si el monopolista les cobra un precio demasiado elevado por la suscripción, estos consumidores decidirán cancelar la suscripción a la revista y visitar más a menudo la biblioteca. En este caso, las bibliotecas presentan una demanda menos elástica que el público en general, por lo que es en el beneficio del monopolista cargar un precio mayor a éstas.

Capítulo 2: Introducción a la teoría de juegos no–cooperativa

La Teoría de Juegos no–cooperativa se ha transformado en una importante herramienta para el análisis del comportamiento estratégico de las empresas. Sus desarrollos han sido aplicados no solo al ámbito de la economía y los negocios, sino que a ciencias tales como la biología. Por si sola, la teoría de juegos es sumamente amplia y requiere de varios cursos formales para lograr un relativo dominio de sus herramientas. Este capítulo tiene por objeto dar una visión general e introductoria de aquellas herramientas que han probado ser útiles en el campo de la organización industrial. Algunos excelentes libros sobre teoría de juegos son Gibbons (1992); Rasmusen (1990); Fudenberg and Tirole (1991).

La teoría de juegos estudia como los individuos toman sus decisiones cuando estos consideran el efecto que sus propias acciones tiene sobre las decisiones de los demás individuos y como las acciones de los demás individuos afectan sus propias decisiones. Por ejemplo, un problema que **no** estudia la teoría de juegos es el siguiente: suponga que usted debe escoger un número comprendido entre el 1 y el 10. Una máquina también escogerá aleatoriamente un número entre 1 y 10. Si ambos números coinciden, entonces usted es el ganador; de otra forma, usted pierde. En este caso, el número que usted escoja no influirá de manera alguna en el número que la máquina escogerá. Suponga ahora que una segunda persona participa del juego. Esta persona, al igual que usted, debe escoger un número entre el 1 y el 10. Si ambos números coinciden, usted es el ganador; si los números no coinciden, entonces la segunda persona es el ganador del juego. Claramente, en este caso lo que usted haga (el número que usted escoja) dependerá de lo que usted espera que su contrincante haga. De la misma forma, la otra persona, al momento de tomar su decisión, cosiderará lo que ella cree usted hará. Esta *interacción estratégica* entre usted y su contrincante es lo que ha transformado un simple problema de decisión en uno que es estudiado por la teoría de juegos. Los juegos **no–cooperativos** se caracterizan por la ausencia de negociación y/o acuerdos entre los jugadores mientras se desarrolla el juego. Por otra parte, los juegos **cooperativos** admiten formalmente la posibilidad de lograr acuerdos sobre una manera común de acción entre los jugadores.

2.1. Elementos de un juego

2.1.1. Jugadores

Los jugadores son simplemente entidades tomadoras de decisiones. Un tipo especial de jugador es la *Naturaleza*.

2.1.2. Racionalidad y common knowledge

Un comportamiento racional corresponde al comportamiento de un jugador que posee consistencia interna en el proceso de toma de decisiones. En lo que resta de estas notas, asumiremos que todos los jugadores son racionales cuando participan de un juego, a excepción de que lo contrario sea claramente establecido.

Common Knowledge

Un hecho en teoría de juegos se dice common knowledge si cada jugador conoce este hecho y cada jugador sabe que todos los demás jugadores conocen este hecho y todo jugador sabe que todos los demás saben que todos conocen este hecho y así *ad infinitum*[1]. En lo que resta de estas notas asumiremos, salvo que lo contrario sea expresamente dicho, que la estructura del juego (jugadores, timing, set de información, etc.) es common knowledge.

2.1.3. Timing

Se entiende como timing del juego al orden en el cual los jugadores son llamados a jugar. Si los jugadores son llamados a jugar de manera secuencial, entonces el juego se conoce como **juego secuencial**. Si los jugadores son llamados a jugar al mismo tiempo, entonces el juego recibe el nombre de **juego simultáneo**. Independiente del tipo de timing que un juego en particular posea, existen dos maneras de representarlo esquemáticamente. La representación del juego forma **normal** especifica los jugadores, las estrategias disponibles para cada jugador y el payoff recibido por cada jugador al escoger cualquier combinación de estrategias. En general, trabajaremos con juegos donde participan n jugadores, donde un jugador arbitrario será denotado como jugador i.

Ejemplo 2.1.1. *El dilema del prisionero.* Considere dos sospechosos acusados de robar la cartera a una abuelita. La policía carece de suficientes pruebas para acusar formalmente a cualquiera

[1] Para una definición más clara de common knowledge, ver el capítulo 14 de Fudenberg and Tirole (1991).

de estos sospechosos, a menos que uno de ellos confiese el haber cometido el crimen. La policía encarcela a cada sospechoso en celdas separadas e impide que ambos puedan comunicarse durante los interrogatorios. Si ningún sospechoso confiesa entonces ambos serán encarcelados durante 1 mes por cargos menores. Si ambos confiesan, entonces ambos serán encarcelados sólo durante 6 meses, pues la confesión es considerada un atenuante en la sentencia. Ahora, si uno solo confiesa entonces aquel que ha confesado será puesto inmediatamente en libertad (por cooperar con la justicia), pero el otro (aquel que no confesó) recibirá una pena de 9 meses en la cárcel, 6 por cometer el crimen y 3 por obstrucción a la justicia.

En el ejemplo anterior, existen dos jugadores (los sospechosos), cada uno de los cuales tiene dos posibles estrategias a seguir: confesar o no confesar. Por lo tanto el set de estrategias disponibles para cada jugador es S_i ={Confesar(C), No Confesar (NC)}, $i = 1, 2$. En este caso, s_1 puede ser C y s_2 NC. La función de beneficios del jugador i puede ser definida como: $U_i(C, C) = (-6, -6)$; $U_i(C, NC) = (0, -9)$; $U_i(NC, C) = (-9, 0)$; $U_i(NC, NC) = (-1, -1)$. Toda la información anterior puede ser resumida en una matriz de 2×2. Esta representación corresponde a la forma normal del juego.

		Prisionero 2	
		No Confesar (NC)	*Confesar (C)*
Prisionero 1	*No Confesar (NC)*	(-1, -1)	(-9, 0)
	Confesar (C)	(0, -9)	(-6, -6)

Figura 2.1: El dilema del prisionero

La otra forma de representar un juego es conocida como la **forma secuencial**. La principal diferencia con respecto a la forma normal de un juego es que en la representación extensiva se hace referencia explicíta al timing del juego.

Ejercicio 2.1.1. Represente el juego del dilema del prisionero en su forma extensiva.

2.1.4. Información

Al hablar de información en un juego, nos referiremos a la manera y forma como la *historia* del juego es conocida por los jugadores. En general, asumiremos que los jugadores tienen *perfect recall*, lo que significa que cada jugador recuerda perfectamente su propia historia en el juego. En otras palabras, asumiremos que los jugadores siempre recuerdan que acción o acciones ejecutaron (y cuando lo hicieron) cada vez que son llamados a jugar. Si cada jugador además conoce la historia de todos los demás jugadores, el juego recibe el nombre de **juego con información perfecta**. Si al menos un jugador no conoce la historia (total o parcialmente) de algún otro jugador, entonces el juego se denomina **juego con información incompleta**.

2.1.5. Acciones versus estrategias

El conjunto de acciones disponibles para cada jugador cuando este es llamado a jugar se conoce como set de acciones. Si un jugador tiene la opción de hacer nada, entonces esta acción debe ser considerada dentro de su set de acciones.

***Definición* 2.1.1.** *Una **estrategia** es una regla que describe que acción debe tomar un determinado jugador cada vez que éste es llamado a jugar. Así, una estrategia es un plan detallado que indica al jugador que hacer **ante cualquier contingencia** que se le presente.*

Ejemplo 2.1.2. Considere dos personas: José y María. Estas personas se conocieron en una fiesta el fin de semana recién pasado. Suponga que en este momento ambos caminan por la misma vereda, pero en direcciones opuestas. María está con la vista hacia el frente, pero José mira hacia el suelo, de manera que es María quien ve a José primero. María tiene dos acciones cuando ve a José: i) sonreír y decir hola; ii) no sonreír y decir hola. Independiente de la acción tomada por María, José tiene dos posibilidades: i) responder el saludo; ii) no responder el saludo. Si José responde el saludo, María puede i) invitarlo al cine; ii) no invitarlo. Ahora bien, si José responde, María puede i) seguir caminando y pasar desapercibido; ii) tomar a José del brazo y darle un puntapié. Una posible estrategia para María es:

- Sonreír y decir hola a José. Si José contesta el saludo, invitarlo al cine. Si José no contesta, tomar a José del brazo y darle un puntapié.

Un ejemplo incorrecto de una estrategia para María es:

- Sonreír y decir hola a José. Si josé contesta el saludo, invitarlo al cine.

La razón del porque el último párrafo no corresponde a una estrategia para María es que no se considera que es lo que María debería hacer si José no contesta el saludo.

2.2. Estrategias dominadas y dominantes

Considere el juego de la figura 2.2[2]:

		Jugador 2		
		C1	*C2*	*C3*
Jugador 1	*R1*	4,3	5,1	6,4
	R2	2,1	3,4	3,6
	R3	3,0	4,6	2,8

Figura 2.2: Estrategias dominantes y dominadas

¿Es posible hacer alguna predicción de como será jugado este juego y de cual será el resultado final? Analicemos las alternativas del jugador 1. Si el jugador 1 juega R1, este siempre obtendrá un mayor payoff independiente de lo que el jugador 2 escoja. Luego es lógico suponer que el jugador 1 preferirá jugar R1 a R2 o R3. Para el jugador 2 tenemos que jugar C3 tiene un payoff asociado mayor que C1 o C2, independiente de lo que el jugador 1 haga. Es racional entonces suponer que el jugador 2 escogerá C3 como su estrategia. Por lo tanto, asumiendo racionalidad de parte de ambos jugadores, una predicción razonable para este juego es que el jugador 1 juegue R1 y el jugador 2 juegue C3. Nuestro análisis predice como resultado para el juego en 2.2 el par $(R1, C3)$. El payoff asociado a este par de estrategias es $U_1(R1, C3) = 6$ y $U_2(C3, R1) = 4$. En el juego representado en 2.2, la estrategia R1 **domina estrictamente** a R2 y R3 para el jugador 1, o bien, R2 y R3 son **estrictamente dominadas** por R1 para el jugador 1.

***Definición* 2.2.1.** *Una **estrategia dominante** para el jugador i es una estrategia que maximiza el beneficio de este jugador independiente de las estrategias escogidas por sus contrincantes.*

Ejemplo 2.2.1. ¿Existen estrategias dominates para el juego del dilema del prisionero en 2.1.1?

En el caso del prisionero 1, confesar siempre otorga un mayor payoff que no confesar, independiente de lo que el prisionero 2 escoja. Por lo tanto, **confesar** es una estrategia dominante para el prisionero 1. De la misma forma, **confesar** es una estrategia dominante para el prisionero 2. Así, el **equilibrio en estrategias dominantes** para el juego del dilema del prisionero es (Confesar, Confesar). Note que si ambos jugadores hubiesen escogido (No confesar, No confesar), la condena

[2]Gran parte de estos ejemplos han sido tomados de Gibbons (1992).

(el payoff) para cada uno habría sido menor. Sin embargo, no está en el beneficio personal de cada jugador escoger No confesar, pues ambos poseen incentivos a desviarse de este *equilibrio*. Como corolario podemos afirmar entonces que un jugador racional nunca jugará estrategias que son estrictamente dominadas por otra (s). Considere el siguiente juego:

		Jugador 2		
		Izquierda	***Centro***	***Derecha***
Jugador 1	***Arriba***	1,0	1,2	0,1
	Abajo	0,3	0,1	2,0

Figura 2.3: Estrategias dominantes y dominadas

En este caso, parece ser que el jugador 1 no posee estrategia dominante. Sin embargo, para el jugador 2 **Derecha** es estrictamente dominada por **Centro**, por lo que el jugador 2 nunca escogerá **Derecha** si **Centro** está disponible. Ahora bien, como el jugador 1 sabe que el jugador 2 nunca jugará **Derecha** si **Centro** está disponible, él puede considerar el siguiente *juego reducido*:

		Jugador 2	
		Izquierda	***Centro***
Jugador 1	***Arriba***	1,0	1,2
	Abajo	0,3	0,1

Figura 2.4: Iteración de estrategias dominantes

Ahora, el jugador 1 posee una estrategia dominante: **Arriba**. Por otra parte, como el jugador 2 sabe que el jugador 1 sabe que él no jugará **Derecha**, el jugador 2 sabe que el jugador 1 no jugará **Abajo**. Por lo tanto, para el jugador 2, el juego en 2.2 se ha reducido a:

		Jugador 2	
		Izquierda	***Centro***
Jugador 1	***Arriba***	1,0	1,2

Figura 2.5: Iteración de estrategias dominantes

Es fácil ahora predecir que el equilibrio en estrategias dominantes para el juego en 2.2 es (Arriba, Medio). Este proceso recibe el nombre de **proceso de eliminación de estrategias dominadas**[3]. Sin embargo este proceso puede producir resultados muy imprecisos. Observe el siguiente juego:

		Jugador 2		
		Izquierda	*Medio*	*Derecha*
Jugador 1	*Arriba*	0,4	4,0	5,3
	Centro	4,0	0,4	5,3
	Abajo	3,5	3,5	6,6

Figura 2.6: Estrategias dominantes

En este juego, ningún jugador posee estrategias estrictamente dominadas, por lo que todas las estrategias sobreviven al proceso de eliminación por iteración. En este caso, no existe forma de predecir, usando el concepto de estrategias dominantes, cual será el resultado del juego en 2.6.

2.3. Equilibrio de Nash

Un par de estrategias (s_i^*, s_{-i}^*) corresponde a un equilibrio de Nash[4] si el jugador i **no tiene incentivos unilaterales a desviarse de s_i^* cuando los demás jugadores juegan s_{-i}^* y viceversa**. Observe que en el juego de la figura 2.6, existe un equilibrio de Nash, (Abajo, Derecha). Cuando el jugador uno juega Abajo, la mejor respuesta de parte del jugador 2 es jugar Derecha. Cuando el jugador 2 juega Derecha, la mejor respuesta del jugador 1 es jugar Abajo. Por lo tanto, no existe incentivo unilateral de ningún jugador a desviarse de (Abajo, Derecha) una vez que este par de estrategias es jugado. Aun cuando el concepto de equilibrio de Nash entrega predicciones más certeras que las obtenidas por medio de eliminación de estrategias dominadas, no siempre es posible determinar un predicción única de como se jugará el juego cuando sólo *estrategias puras* son consideradas. Considere el siguiente juego. Usted tiene una moneda de \$500 y es invitado a participar del siguiente juego. Junto a su contrincante, usted debe poner su

[3] Es importante recalcar que el anterior análisis se aplica solo a estrategias **estrictamente dominadas**, pues si una estrategia es **débilmente** dominada, nuestro análisis puede no ser válido. Ver Fudenberg and Tirole (1991).

[4] El concepto de equilibrio de Nash fue introducido por el matemático estadounidense y premio Nobel de Economía (1994) John Nash en 1950.

moneda de \$500 sobre la mesa *al mismo tiempo* que su contrincante. Si al mostrar las monedas, estas coinciden (es decir ambas muestran cara o ambas muestran sello) su contrincante gana ambas monedas. En caso contrario, i.e., si al mostrar las monedas estas no coinciden, usted gana ambas monedas. Este juego, en su forma normal, queda:

		Contrincante	
		Cara	*Sello*
Usted	*Cara*	-500,500	500, -500
	Sello	500, -500	-500, 500

Figura 2.7: Juego de suma cero

¿Cuál es el equilibrio de Nash en este juego? Analicemos su caso. Si su contrincante juega **Cara**, entonces su mejor respuesta es jugar **Sello**. Al contrario, si su contrincante juega **Sello**, entonces su mejor respuesta es jugar **Cara**. Este mismo análisis es válido para su contrincante. Por lo tanto, no existe ningún par de estrategias **puras** (s_i^*, s_{-i}^*) tal que s_i^* represente la mejor respuesta a s_{-i}^* y viceversa. Suponga ahora que este juego se repite muchas veces y usted escoge jugar cara el 50 % de las veces, mientras que su contrincante decide jugar cara el 75 % de las veces. En este caso, el par (1/2; 1/2) constituye una **estrategia mixta**[5] para usted y el par (3/4; 1/4) es una estrategia mixta para su contrincante. Así, una estrategia mixta consiste en diversas estrategias puras elegidas con determinadas probabilidades. Observe que una estrategia pura es una estrategia mixta degenerada, en el sentido que jugar la estrategia pura **cara** es lo mismo que jugar la estrategia mixta (1,0) donde cara se juega con probabilidad uno.

Retomemos el juego en 2.7. Suponga que usted considera que su contrincante jugará **cara** q % de las veces y **sello** las restantes $(1-q)$ % (es decir juega **cara** con probabilidad q y **sello** con probabilidad $(1-q)$). De acuerdo con estas probabilidades, el payoff *esperado* para cada una de sus estrategias puras es:

$$E[u_1(cara, q)] = -500q + 500(1-q) \tag{2.1}$$

$$E[u_1(sello, q)] = 500q - 500(1-q) \tag{2.2}$$

Si usted es racional (como lo suponemos a lo largo de estas notas), entonces jugará **cara** si

[5]El análisis de estrategias mixtas presentadas en estas notas fue en su mayoría extraído de Gibbons (1992).

y solo si

$$E[u_1(cara, q)] > E[u_1(sello, q)] \tag{2.3}$$
$$-500q + 500(1-q) > 500q - 500(1-q)$$
$$1000 - 2000q > 0 \Rightarrow q < \frac{1}{2}$$

Similarmente, usted estará mejor jugando **sello** si $q > 1/2$ y será indiferente entre sus dos estrategias puras si $q = 1/2$. Analicemos ahora a su contrincante. Suponga que él cree que usted jugará **cara** con probabilidad r y **sello** con probabilidad $(1 - r)$. Aplicando un análisis similar al usado para explicar su comportamiento, es posible concluir que su contrincante preferirá jugar **cara** si y solo si $r > 1/2$; **sello** si $r < 1/2$ y estará indiferente entre ambas si $r = 1/2$. Recuerde que un equilibrio de Nash para el caso de estrategias puras requería que no existiesen incentivos unilaterales a desviarse de él. La extensión a esta definición necesaria para incluir las estrategias mixtas es sencilla. Claramente, para cualquier q distinto de $1/2$ usted tendrá incentivos a desviarse. Por ejemplo, suponga que en equilibrio q es igual a $1/4$. De acuerdo con (2.3) usted estará mejor jugando **cara** que **sello**. Como su contrincante sabe esto, entonces su mejor respuesta será **cara**. Pero en este caso, usted estará mejor *desviándose* de jugar **cara** (si su contrincante juega cara, lo mejor que usted puede hacer es jugar **sello**). De esta forma $q = 1/4$ **no** puede formar parte de un equilibrio de Nash, pues con $q = 1/4$ usted tiene incentivos a desviarse, destruyendo así el equilibrio. La única combinación (q, r) en la cual no hay incentivos unilaterales a desviarse es $(q^*, r^*) = (1/2; 1/2)$. Por lo tanto, el equilibrio de Nash en estrategias mixtas para el juego en 2.7 es $(q^*, r^*) = (1/2; 1/2)$. En palabras, en equilibrio usted jugará 50 % de las veces **cara** y 50 % de las veces **sello**. Para finalizar esta sección, se presenta uno de los teoremas más importantes en la Teoría de Juegos.

***Theorema* 2.3.1.** *(Nash, 1950) Sea $G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ un juego con n jugadores. Si el conjunto de estrategias puras S_i es compacto para cada i, entonces el juego tiene al menos un equilibrio de Nash, posiblemente en estrategias mixtas.*

Este teorema nos asegura que si el juego que analizamos es *bien comportado*, entonces siempre tendrá una solución en términos de equilibrios de Nash, aún cuando esta solución puede estar representada por estrategias mixtas.

2.4. Juegos Dinámicos

2.4.1. Juegos dinámicos con información perfecta y completa

Comenzaremos analizando juegos dinámicos donde todos los jugadores conocen la historia completa del juego cuando son llamados a jugar y nadie posee más o mejor información que los otros jugadores. Supongamos, para mayor simplicidad, que existen solo dos períodos y dos jugadores, A y B. En el período 1, el jugador A es llamado a jugar. En el segundo período, el jugador B quien ha observado la estrategia escogida por A en el período 1, es llamado a jugar. La forma extensiva de este juego es como sigue:

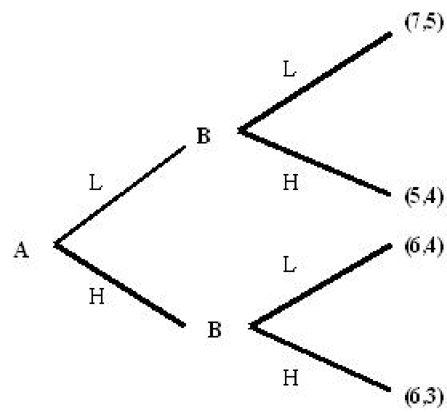

Figura 2.8: Juego dinámico en su forma extensiva

¿Cuál es el equilibrio de este juego? El método usado para resolver este tipo de juegos se llama **inducción hacia atrás** y consiste en comenzar resolviendo el juego desde la última etapa hasta llegar a la primera. Para el juego en 2.8, debemos comenzar desde la segunda etapa, es decir, debemos encontrar el equilibrio del *subgame* descrito en la figura 2.9.

Claramente, lo mejor que puede hacer el jugador B es escoger **L**. De la misma forma, si consideramos el bloque inferior del juego 2.8, lo mejor que puede hacer el jugador B es escoger **L**. Por lo tanto, independiente de lo que haga el jugador A, el jugador B siempre estará mejor escogiendo **L**. Luego, **L** representa una estrategia dominante para el jugador B. Considere ahora la etapa 1 del juego en 2.8. El jugador A puede escoger **L** o **H**. Él sabe que, independiente de lo que escoja, el jugador B siempre escogerá **L**. Por lo tanto, si escoge **L**, el jugador B escogerá **L**

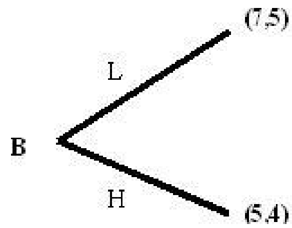

Figura 2.9: Subgame del juego en 2.8

y el payoff del jugador A será 7. Ahora bien, si escoge **H**, el jugador B escogerá **L**, por lo que el payoff del jugador A será 6. Del análisis anterior se desprende que la estrategia que reporta un mayor beneficio al jugador A es **L**, por lo que el equilibrio del juego será (L,L). Ahora considere el juego en la figura 2.10.

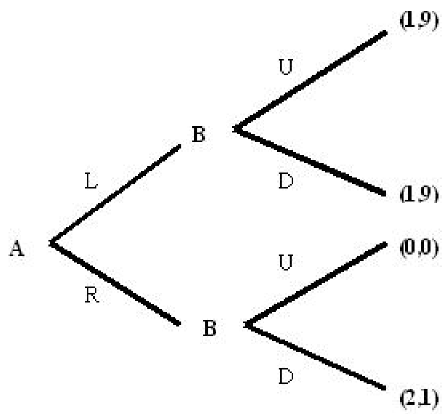

Figura 2.10: Amenazas y credibilidad

¿Cuál es la representación normal de este juego? Para el jugador A existen dos acciones que a su vez constituyen sus estrategias, $S_a = \{L, R\}$. Sin embargo, para el jugador B, el set de acciones (U y D) **no** es equivalente al set de estrategias disponibles. Sabemos que una estrategia es un plan que detalla el camino a seguir ante cualquier contingencia que se presente. Por lo tanto, una estrategia para el jugador B sería jugar U si el jugador A juega L **y** jugar U si el jugador a juega R. En total, el jugador B posee cuatro estrategias. Estas son:

1. Jugar U si A juega L; jugar U si A juega R;
2. Jugar U si A juega L; jugar D si A juega L;
3. Jugar D si A juega L; jugar D si A juega L;
4. Jugar D si A juega L; jugar D si A juega R;

Por lo tanto, la representación normal del juego en 2.10 queda como sigue:

		Jugador B			
		U,U	*U,D*	*D,U*	*D,D*
Jugador A	*L*	1,9	1,9	1,9	1,9
	R	0,0	2,1	0,0	2,1

Figura 2.11: Representación en forma normal juego 2.10

En la matriz de payoff en 2.11, es posible determinar 4 equilibrios de Nash, a saber, [L; (U,U)]; [L; (D,U)]; [R; (U,D)] y [R; (D,D)]. Sin embargo, una análisis más detallado del juego revela que dos de estos equilibrios de Nash no corresponden a **equilibrios del juego 2.10**, pues envuelven amenazas no creíbles de parte del jugador B. Partamos por el equilibrio [L; (U,U)]. Lo que este par de estrategias nos dicen es que, en equilibrio, el jugador B jugará U dado que A ha jugado L[6]. ¿Es, jugar U de parte del jugador B, creíble por el jugador A? Suponga que el jugador B *amenaza* al jugador A diciéndole lo siguiente: 'Si tu (jugador A) escoges R entonces yo (jugador B) jugaré U, por lo que tu payoff será 0'. Claramente, esta amenaza es **no creíble**. Observe que si el jugador A (quien juega primero) escoge R y el jugador B escoge U, este último también recibirá un payoff de 0 pudiendo recibir 1 si escoge L. Como A sabe que B es racional, A sabe que B nunca jugará U si él escoge R por lo que la amenaza de B no se concretará. Sin embargo, el par de estrategias [R; (U,D)] y [R; (D,D)], las cuales implican que A juega R y B juega D **si** constituyen un equilibrio para el juego en (2.10), pues no existen incentivos unilaterales a desviarse de el. A modo de corolario podemos decir que no todo equilibrio de Nash califica como equilibrio de un juego dinámico. Todo aquel equilibrio *estático* de Nash que involucre amenazas no creíbles no puede formar parte de un equilibrio de un juego dinámico.

[6] En estricto rigor (U,D), por ejemplo, significa que el jugador B jugará U cuando A juegue L y D cuando A escoja R.

2.4.2. Juegos dinámicos con información perfecta e incompleta

Los juegos presentados en la sección anterior consisten en juegos donde todos los jugadores conocen la historia completa del juego cuando son llamados a jugar. Sin embargo, existen juegos donde uno (o todos) los jugadores conocen solo *parcialmente* la historia del juego cuando es su turno de jugar. Por ejemplo, analicemos el juego del Dilema del Prisionero analizado en (2.1.1). La forma extensiva de este juego es como sigue:

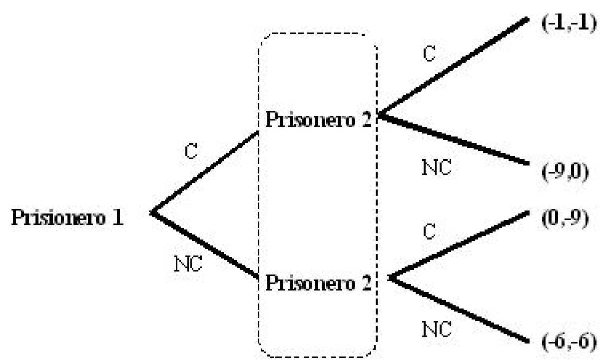

Figura 2.12: Representación en forma extensiva del Dilema del Prisionero

Observe una importante diferencia con las representaciones en forma extensiva de los juegos en la sección anterior. Aquí, el juego comienza con el turno del prisionero 1 de jugar. Él puede escoger Confesar o No Confesar. Una vez que el jugador 1 ha jugado, es el turno del prisionero 2. Sin embargo, el prisionero 2 sabe **solamente** que es su turno de jugar, pero no sabe que fue lo que jugó el prisionero 1. En otras palabras, el prisionero 2 debe jugar sin mayor información que el hecho mismo de jugar. En los juegos presentados en la sección anterior, cada vez que un jugador era llamado a jugar, además de saber que era su turno de mover, sabía que era lo que había sucedido hasta antes de ese momento. Es decir, en los juegos con información completa, el jugador sabía la historia completa del juego cada vez que era requerido para jugar. En el caso del dilema del prisionero en 2.12, el prisionero 2 no sabe que fue lo que jugó el prisionero 1; sólo sabe que debe jugar. Es en este sentido que el juego representado en (2.12) constituye un juego con información incompleta. Gráficamente, el hecho que un jugador no posea toda la información al momento de jugar se representa por medio de una circunferencia con líneas segmentadas en el nodo correspondiente del juego. Como el prisionero 2 sólo sabe que le corresponde jugar, él tiene solo **dos** estrategias: Confesar y No Confesar. La razón de esto es que el prisionero 2 no puede condicionar sus acciones a las que haya tomado el prisionero 1, pues no conoce lo que éste hizo. Por lo tanto, si deseamos llevar el juego en (2.12) a su forma normal, obtendremos la matriz en 2.1.1. Por último, debería ser claro el hecho que la elección del prisionero 1 como el primer jugador fue totalmente arbitraria y el análisis efectuado no se altera si, por ejemplo, el jugador 2 es escogido como el primer jugador.

2.4.3. Equilibrio perfecto (Subgame Perfect Nash Equilibrium)

Considere el siguiente juego:

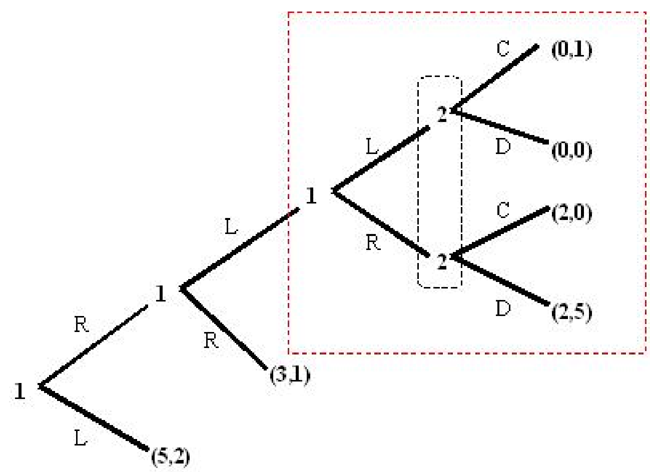

Figura 2.13: Equilibrio perfecto

¿Cuál es el equilibrio de este juego? Observe que el proceso de inducción hacia atrás no puede ser aplicado en este caso. La razón es que, cuando el jugador 2 es llamado a jugar, éste no sabe que es lo que el jugador 1 ha escogido y, por lo tanto, no puede condicionar su decisión a la elección previa del jugador 1. Por lo tanto, el análisis aplicado en la sección anterior es inválido en el presente contexto. Para determinar el equilibrio del juego (2.13) debemos hacer uso de un concepto de equilibrio más potente que el de equilibrio de Nash para juegos estáticos.

Definición* 2.4.1.** *Un* ***subgame *de un juego es una* porción *de un juego dinámico que puede ser considerado un juego en si mismo.*

En el juego graficado en (2.13), la porción encerrada en líneas segmentadas corresponde a un subgame del juego (2.13). Note que esta porción del juego puede ser considerada como un *minijuego*, pues cumple con todas las propiedades descritas en la sección 2.1 (excepto por los payoffs, el juego luce similar al dilema del prisionero en la figura 2.12). Como tal, un subgame posee un equilibrio de Nash. Por lo tanto, podemos resolver el subgame en términos de su equilibrio y *reemplazar* el equilibrio que encontremos en la versión total del juego. Concretamente, el subgame en líneas segmentadas en la figura 2.13 posee un equilibrio de Nash, (R,D), con el payoff asociado de (2,5). Por lo tanto, cuando esta etapa del juego sea alcanzada, sabemos que los jugadores escogerán (R,D) en equilibrio. Por lo tanto, podemos representar el juego 2.13 de la siguiente forma:

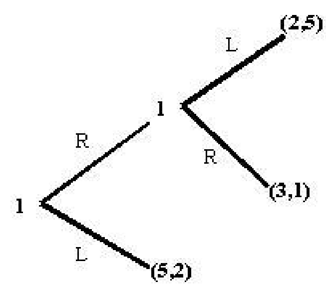

Figura 2.14: Subgame perfection

Ahora podemos aplicar el proceso de inducción hacia atrás, pues el juego en (2.14) corresponde a uno con información completa. El equilibrio, por lo tanto, es (L, Hacer Nada).

Definición* 2.4.2.** *(Fudenberg and Tirole, 1991, pag. 74) Sea h^k la historia del juego G en la etapa k. Denote el subgame en la etapa k del juego G como $G(h^k)$. Un set de estrategias s^* forma un* ***Equilibrio Perfecto *(Subgame Perfect Nash Equilibrium) para el juego G si, para cada posible historia h^k, el set s^* dado h^k forma un equilibrio de Nash para $G(h^k)$.*

En otras palabras, lo que la definición 2.4.2 nos dice es que un equilibrio perfecto estará formado por estrategias tal que, en cada subgame que podamos formar en el juego, correspondan a un equilibrio de Nash en cada uno de estos subgames. Por ejemplo, en el juego (2.13), un equilibrio perfecto no puede contener el par (L,C) puesto que dicho par de acciones no forman un equilibrio de Nash en el subgame de la figura 2.13. Si por el contrario esto fuese cierto, cuando la etapa 3 del juego sea alcanzada, los jugadores tendrían incentivos unilaterales a desviarse de (L,C) en favor de (R,D).

Capítulo 3: Teorías de Oligopolio

Entenderemos por oligopolio a aquella estructura de mercado en la cual existen pocas empresas competidoras las que consideran el efecto que sus decisiones produce sobre las decisiones de sus competidores y viceversa. Es decir, en una industria caracterizada por una estructura oligopolística, las empresas consideran las interacciones estratégicas que ocurren entre ellas. Por interacción estratégica entendemos el hecho de que una empresa cualquiera toma sus decisiones de producción y/o precios en base a lo que las otras empresas hacen o en base a lo que dicha empresa piensa sus competidores harán en el futuro. Para simplificar nuestro análisis, estudiaremos un caso particular de oligopolio, en el que existen solo 2 empresas. Este tipo de oligopolio se conoce como **Duopolio**. Además supondremos que a) existe competencia perfecta por el lado de la demanda; b) existe un número fijo de empresas ($n = 2$); c) todas las empresas (n) producen un solo bien homogéneo[1]. Así, suponiendo que existen solo dos empresas en el mercado, podemos resumir sus decisiones de producción y precio en las siguientes cuatro variables:

- Firma 1: precio 1 (p_1); cantidad 1: (q_1)
- Firma 2: precio 2 (p_2); cantidad 2: (q_2)

Puede suceder que una de las firmas conozca de antemano la elección del precio y/o la cantidad de su competidora. Por ejemplo, puede suceder que la firma 1 escoja el precio primero que la firma 2. En este caso, la firma 1 recibe el nombre de **Líder en precios**, mientras que la firma 2 recibe el nombre de **Seguidor en precios**. También es posible que la firma 1 escoja la cantidad primero que la firma 2. Aquí, la firma 1 recibe el nombre de **Líder en cantidad** y la Firma 2 el de **Seguidor en cantidad**. Por otra parte, si ninguna firma conoce lo que su competidor hará, lo mejor que éstas pueden hacer es formar *conjeturas* en torno al precio a cobrar o la cantidad a producir de sus competidores. Básicamente, podemos observar 2 combinaciones: ambas firmas eligen simultáneamente el precio o bien ambas firmas eligen simultáneamente la cantidad. En resumen, analizaremos 4 tipos de modelos oligopólicos:

[1] Este supuesto será relajado cuando analicemos los modelos de oligopolio con productos diferenciados.

1. Liderazgo en cantidades (Modelo de Stackelberg en cantidades);
2. Liderazgo en precios (Modelo de Stackelberg en precios);
3. Fijación simultánea de cantidad (Modelo de Cournot);
4. Fijación simultánea de precios (Modelo de Bertrand).

Para una visión histórica sobre la evolución de la teoría de oligopolio, ver Shapiro (1989); Wolfstetter (1999) o Tirole (1988).

3.1. Competencia simultánea en cantidades: el modelo de Cournot

El concepto de competencia en mercados compuestos por un número limitado de empresas fue formalmente abordado por el matemático francés Augustin Cournot (1801–1877) . Básicamente, Cournot formuló un modelo en donde las empresas competían sobre la base de la cantidad producida, tomando cada una su decisión individual sin saber cual era la decisión de la(s) firma(s) competidora(s). Antes de resolver matemáticamente el modelo de Cournot para $n = 2$, caracterizaremos la condición de equilibrio para el caso general con n empresas. Sea $Q = P(q_i + q_{-i})$ la demanda de mercado, donde q_i representa la producción de la empresa i–ésima y q_{-i} la producción de todos los competidores de la firma i. Considere ahora el problema de la empresa i–ésima. Como esta empresa no sabe el nivel de producción de sus competidores, lo mejor que puede hacer es determinar su nivel de producción **conjeturando**[2] o **suponiendo** que el nivel de producción de sus competidores será, por ejemplo, q_{-i}, el cual es dado. De esta manera el problema para la empresa i puede expresarse como sigue:

$$\max_{q_i} \pi_i(q_i, q_{-i}) = P(q_i + q_{-i})q_i - C_i(q_i) \tag{3.1}$$

La condición de primer orden para este problema es:

$$\frac{\delta \pi_i}{\delta q_i} = P(q_i + q_{-i}) + \frac{\delta P(q_i + q_{-i})}{\delta Q} \frac{\delta Q}{\delta q_i} q_i - Cmg_i = 0 \tag{3.2}$$

[2] El término conjetura debe ser interpretado con precaución. En estricto rigor, el modelo de Cournot no asume conjeturas acerca el nivel de producción de la empresa individual con respecto a sus competidores . Para un tratamiento formal de modelos de competencia en cantidad que incorporan conjeturas, véase Shapiro (1989) .

Aquí es donde cobra relevancia el término conjetura (véase nota al pie (2)). Como en el modelo de Cournot las firmas no realizan conjeturas con respecto a la producción de sus rivales sino que asumen un nivel de producción de sus competidores como exógeno, el término $\frac{\delta Q}{\delta q_i}$ es igual a uno. En caso contrario (si dicha cantidad no es asumida como dada) dicho término sería distinto de uno. Antes de proseguir, acomodemos la condición (3.2) de manera de obtener una expresión que nos permita visualizar algunos aspectos cualitativos del modelo de Cournot. Primero, reescriba (3.2) como sigue:

$$P(Q) - Cmg_i = -\frac{\delta P(Q)}{\delta Q} q_i \tag{3.3}$$

Ahora multiplique (3.3) por PQ/PQ, donde los argumentos de P han sido suprimidos para facilidad de la notación y obtenga la siguiente expresión,

$$\frac{P(Q) - Cmg_i}{P} = -\frac{\delta P(Q)}{\delta Q} \frac{Q}{P} \frac{q_i}{Q} \tag{3.4}$$

Defina los siguientes términos,

$$\epsilon = -\frac{\delta Q(P)}{\delta P} \frac{P}{Q} \tag{3.5}$$

$$\sigma_i = \frac{q_i}{Q} \tag{3.6}$$

donde ϵ corresponde al negativo de la elasticidad–precio de la demanda de mercado y σ_i a la participación de mercado, en término de unidades producidas, de la empresa i. De esta forma, la expresión en (3.4) puede ser expresada como sigue:

$$\frac{P(Q) - Cmg_i}{P} = \frac{\sigma_i}{\epsilon} \tag{3.7}$$

La expresión en (3.7) puede usarse para establecer la relación existente entre el performance de una industria oligopolística y el poder de mercado ejercido por las firmas participantes de ésta. Defina el **margen promedio de la industria** como el promedio de los márgenes de cada firma, ponderados por sus correspondientes participaciones de mercado. Así,

$$\frac{p-\bar{c}}{p}=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\frac{p-c_i}{p} \tag{3.8}$$

donde $\bar{c}$ es el costo marginal promedio de la industria y c_i es el costo marginal de la empresa i. Usando la expresión (3.7) para sustituir el margen de la empresa i en (3.8), obtenemos:

$$\frac{p-\bar{c}}{p}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_i^2}{\epsilon} \tag{3.9}$$

Ahora, defina $H\equiv\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$ como el índice de concentración de Herfindahl–Hirschman. Así, (3.9) puede ser reescrita como:

$$\frac{p-\bar{c}}{p}=\frac{H}{\epsilon} \tag{3.10}$$

La ecuación (3.10) sugiere que en equilibrio, para una industria donde las firmas compiten *à la Cournot*, la relación existente entre concentración (medida por H) y desempeño industrial es negativa. Así, deberíamos esperar que industrias más concentradas obtengan un margen mayor, lo que implica un peor desempeño desde el punto de vista social, toda vez que la diferencia entre el precio y el costo marginal será mayor. Sin embargo, debemos ser precavidos al afirmar que efectivamente industrias más concentradas tendrán desempeños más *pobres* desde el punto de vista social, toda vez que debemos estar seguros que la diferencia entre precio y costo marginal es un correcto indicador del costo social generado por una industria concentrada. Para un tratamiento mucho más completo de este punto, vea Shapiro (1989).

Una vez establecidos algunos aspectos cualitativos referentes al modelo de Cournot, retomemos el problema que enfrenta la empresa i–ésima. Para mayor simplicidad, consideraremos $n=2$, es decir, determinaremos el equilibrio de Cournot para un duopolio. Suponga que, para una cantidad dada de la firma 2, q_2, el nivel de producción óptimo para la empresa 1 es q_1^*. Dicho nivel óptimo de producción debe corresponder a la solución de la condición de primer orden,

$$\frac{\delta\pi_1}{\delta q_1}=P(q_1+q_2)+\frac{\delta P(q_1+q_2)}{\delta Q}q_1-Cmg_1(q_1)=0 \tag{3.11}$$

Denote como q_1^* la solución a (3.11). Como q_1^* es una solución a un problema de optimización debe, necesariamente, estar expresada en términos de las variables exógenas al problema, que en este caso se reducen a la cantidad producida por la firma 2, q_2. Por lo tanto, podemos decir que q_1^* será una función del tipo $q_1^* = q_1(q_2)$. Esta función muestra el nivel óptimo a producir por la empresa 1 cuando la empresa 2 produce q_2. Por lo tanto, muestra la mejor respuesta de la empresa 1 al nivel de producción de la empresa 2, q_2. Es en este sentido que la función $q_1^* = q_1(q_2)$ es conocida como **función de reacción** de la empresa 1, aun cuando debería ser claro que el término reacción no es del todo correcto en el presente contexto. Como hemos supuesto que $n = 2$, la firma 2 solucionará un problema similar al de la empresa 1, por lo que la firma 2 determinará su propia función de reacción, $q_2^* = q_2(q_1)$. Así, tenemos un sistema de ecuaciones formado por dos ecuaciones, $q_1 = q_1(q_2)$ y $q_2 = q_2(q_1)$ y dos incógnitas, q_1 y q_2. La solución a este sistema, (q_1^*, q_2^*), corresponde al equilibrio para el modelo de duopolio donde las firmas determinan simultáneamente sus niveles de producción. Observe que el par (q_1^*, q_2^*) corresponde a un par de **mejores respuestas**, por lo que el equilibrio de Cournot es sencillamente un equilibrio de Nash en cantidades.

Ejercicio 3.1.1. Suponga que la función de demanda de un mercado donde participan solo dos firmas es $P = a - bQ$. Suponga además que el costo marginal de producción de la firma 1 es constante e igual a c_1, mientras que el costo marginal de la firma 2 es constante e igual a c_2, donde $c_1 < c_2$. Determine el equilibrio de Cournot para esta industria. En equilibrio, ¿qué empresa producirá un mayor nivel de producto? ¿por qué? Explique.

3.2. Competencia simultánea en precios: el modelo de Bertrand

Un modelo alternativo al de Cournot es el propuesto por el también matemático francés, J. Bertrand en 1883. Básicamente, ambos modelos se diferencian en la variable estratégica empleada por las firmas competidoras. En el caso de Bertrand, las firmas escogen el precio a cobrar en vez de la cantidad a producir. Por lo tanto, el modelo de Bertrand es un modelo de determinación simultánea de precios. Aún cuando a primera vista los resultados de ambos modelos deberían ser similares, estos resultan ser diametralmente opuestos. En el modelo de Cournot, las empresas gozan de cierto poder de mercado, toda vez que en equilibrio el precio cobrado es mayor al costo marginal de producción. Sin embargo, y como veremos más adelante, el modelo de Bertrand predice que en equilibrio las empresas cobrarán un precio igual a su costo marginal. Es decir, sólo con dos empresas, Bertrand mostró que se puede lograr un equilibrio socialmente óptimo. Este resultado resultó perturbador, pues parece contraintuitivo que en industrias compuestas por dos empresas, el resultado sea similar al obtenido bajo competencia perfecta. No obstante, dicho resultado (el predicho por Bertrand) se basa en supuestos sumamente restrictivos, que están lejos de ser satisfechos a cabalidad en la realidad. Primero, los productos de ambas firmas son homogéneos. Segundo, se asume que las empresas poseen costos marginales idénticos[3]. Tercero, se asume que las empresas no poseen restricciones de capacidad productiva, por lo que son capaces de satisfacer toda la demanda que enfrentan a cualquier precio. Bajo estos supuestos, Bertrand afirmó que en equilibrio las empresas cobrarán un precio igual al costo marginal de producción, es decir, en equilibrio será cierto que $p_1 = p_2 = c$ donde p_i, $i = 1, 2$ es el precio cobrado por la firma i y c es el costo marginal de producción[4]. Supongamos que ambas empresas deciden cobrar un precio mayor al costo marginal c. Si este es el caso, la empresa 1 (o la 2) tendrá incentivos a cobrar un precio un poco menor a p_1 pero superior al costo marginal, pues de esta forma obtendrá todo el mercado para ella sola (recuerde que los bienes producidos son homogéneos). Sin embargo, la empresa 2 (o la 1) razonará de igual forma, reduciendo su precio un poco más que la empresa 1 (o la 2) a modo de ser ella la que obtiene todo el mercado. Por lo tanto, el único par de precios consistente con la ausencia de desviaciones unilaterales por parte de las firmas es aquel en que $p_1^* = p_2^* = c$, pues de otra forma siempre existirán incentivos unilaterales a reducir el precio con tal de acaparar todo el mercado. Así, el par (p_1^*, p_2^*) tal que $p_1^* = p_2^* = c$ constituye un equilibrio de Nash para el modelo de Bertrand.

Como usted pudo haber notado, el equilibrio anterior fue obtenido bajo una serie de supuestos altamente restrictivos. Como ejercicio, analice que sucede si mantenemos el supuesto (1), es decir, los bienes son homogéneos; y el supuesto (3) no existen restricciones de capacidad; pero relajamos el supuesto (2) de igualdad en los costos marginales. Suponga ahora que ambas empresas poseen costos marginales constantes, pero distintos. Para ser más concretos, suponga que $c_1 < c_2$, donde c_1 es el costo marginal para la empresa 1 y c_2 el costo marginal para la empresa 2. ¿Cuál será el nuevo equilibrio en el modelo de Bertrand?

[3]Este supuesto no es esencial para determinar el equilibrio en un mercado donde las empresas compiten à la Bertrand.

[4]Recuerde que hemos supuesto que ambas empresas poseen igual estructura de costos, por lo que sus costos marginales son idénticos.

3.3. Liderazgo en Cantidades: Modelo de Stackelberg

Este modelo supone que en la industria existe una empresa dominante que es quien dicta los *estándares* de producción al resto de los competidores. El ejemplo clásico de este tipo de industrias es la de computadores en los años 60–70. En estos años, IBM dictaba los cánones de producción con respecto al tipo de computadores que eran producidos. Suponiendo que sólo hay dos empresas, llamemos a la que elige la cantidad a producir primero el **Líder** y a la firma que acepta este nivel como dado **Seguidor**. Así, el líder producirá una cantidad q_1, mientras que el seguidor producirá una cantidad q_2. Lógicamente, la cantidad total producida en la industria cuando hay dos empresas es $Q = q_1 + q_2$. Si suponemos que la demanda de mercado es $P(Q)$, el precio vigente cuando las empresas producen q_1 y q_2 respectivamente es $P = P(q_1 + q_2)$.

Este modelo de oligopolio (duopolio para ser más exactos) puede ser planteado como un juego secuencial con el siguiente timing: (1) el líder (empresa 1) escoge su nivel de producción; (2) una vez que el líder ha tomado su decisión de producción, el seguidor (empresa 2) observa este nivel de producto y decide el suyo propio; (3) el líder recibe $\pi^L(q_1, q_2)$ como payoff mientras que el seguidor recibe $\pi^S(q_1, q_2)$. Tal como discutimos en el capítulo 2, el presente modelo corresponde a un juego secuencial con información perfecta y completa, por lo que la forma de resolverlo (es decir, determinar las cantidades a producir por el líder y el seguidor en equilibrio) es por inducción hacia atrás. Como suponemos que el juego es common knowledge, la estructura del juego es conocida por ambos jugadores y en particular por el líder, quien entonces resolverá el problema del seguidor en primer lugar, para luego resolver el suyo. El problema del seguidor es el siguiente:

$$\max_{q_2} \pi^s(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2)q_2 - C_2(q_2) \tag{3.12}$$

Para el seguidor, la cantidad producida por el líder está dada, toda vez que él debe tomar su decisión de producción una vez que el líder ha tomado la suya. La condición de primer orden para el problema en (3.12) es:

$$\frac{\delta \pi^S}{\delta q_2} = P(q_1 + q_2) + \frac{\delta P(q_1 + q_2)}{\delta q_2} q_2 - Cmg_2(q_2) = 0 \tag{3.13}$$

donde $Cmg_2(q_2)$ corresponde al costo marginal del seguidor. Note que los dos primeros términos de la ecuación (3.13) corresponden al ingreso marginal del seguidor. Por lo tanto, la ecuación

(3.13) puede expresarse en términos más familiares como $Img^s = Cmg^s$. Las condiciones de segundo orden serán satisfechas toda vez que la demanda sea cóncava en q y la función de costo marginal sea no decreciente en q (verifique que esto se cumple). Sea q_2^* la cantidad del seguidor que satisface (3.13). Ciertamente, q_2^* debe estar expresada en términos de las variables exógenas del problema, las que en este caso se reducen a la cantidad producida por el líder, q_1. Luego, la siguiente relación debe ser cierta:

$$q_2^* = q_2(q_1) \tag{3.14}$$

La función en (3.14) nos dice como responderá el seguidor, en forma óptima, a un nivel de producción del líder q_1. Así, esta función corresponde a la función de *reacción* o de *mejor respuesta* del seguidor.

Una vez que el líder ha resuelto el problema del seguidor puede plantear su propio problema incorporando esta información en su función objetivo. De esta forma, el problema del líder puede plantearse como sigue:

$$\max_{q_1} \pi^L(q_1, q_2^*(q_1)) = P(q_1 + q_2(q_1))q_1 - C_1(q_1) \tag{3.15}$$

Observe que el problema del líder se reduce a maximizar una función univariada, toda vez que q_2^* (la cantidad óptima producida por el seguidor) es una función de q_1. Suponiendo que las condiciones de segundo orden para este problema son satisfechas, la condición necesaria y suficiente para un máximo en (3.15) es:

$$\frac{\delta \pi^L}{\delta q_1} = P(q_1 + q_2^*) + \frac{\delta P(q_1 + q_2^*)}{\delta q_1} q_1 - Cmg_1(q_1) = 0 \tag{3.16}$$

De esta forma, denotando la solución a (3.16) por q_1^*, tenemos que la solución al modelo de duopolio de Stackelberg es $(q_1^*, q_2^*(q_1^*))$, toda vez que $q_2^*(q_1^*)$ representa la mejor respuesta a q_1^* y viceversa.

Ejercicio 3.3.1. Determine el equilibrio de mercado para dos empresas, donde la empresa 1 se comporta como líder y la empresa 2 como seguidor. La función de demanda es $P(q_1+q_2) = a-bQ$. El costo marginal de producción es constante e igual a cero para ambas firmas.

3.4. Liderazgo en Precios: Modelo de Stackelberg

Al igual que en modelo de liderazgo en cantidades, en el presente modelo asumiremos que hay solo dos empresas, una de las cuales actúa como líder y la otra como seguidor. Sin embargo, en el presente caso la variable estratégica no será la cantidad a producir, sino que el precio a cobrar. De manera general, podríamos pensar que la competencia basada en precios posee un componente de corto plazo comparada con la competencia en cantidades, toda vez que es más fácil y rápido para las firmas ajustar su precio que su cantidad a producir. La forma de solucionar este problema es análoga a la utilizada en el modelo de liderazgo en cantidades, por lo que lo primero que debemos hacer es resolver el problema del seguidor.

Como los productos ofrecidos por el líder y el seguidor son homogéos, el seguidor no podrá cobrar un precio distinto al dispuesto por el líder. Por ejemplo, suponga que el líder establece un precio P^L. Como el seguidor juega solo después que el líder ha determinado su precio, éste no puede cobrar un precio mayor a P^L, toda vez que precios mayores necesariamente significarán cero ventas para el seguidor. Ahora, si el seguidor intenta cobrar un precio menor al del líder, es el líder quien tendrá cero ventas. Pero, como el líder juega primero, jamás establecerá un precio P^L tal que el seguidor pueda recortarlo, es decir, tal que el seguidor pueda cobrar un precio menor a P^L. Por lo tanto, en equilibrio el seguidor solo puede cobrar un precio igual a P^L. Dado que el seguidor *acepta* el precio del líder, P^L, su problema es similar al de una empresa actuando en un mercado perfectamente competitivo. Así, la condición de máximo beneficio para el seguidor (una vez más, supondremos que las condiciones de segundo orden son satisfechas) se reduce a la conocida igualdad entre el precio y el costo marginal, esto es,

$$P = Cmg_2 \tag{3.17}$$

De la igualdad en (3.17) podemos deducir la **función de oferta del seguidor**, la cual denotaremos como $S(P^L)$. Una vez resuelto el problema del seguidor, podemos volver al análisis del líder. Como el líder observa que, al establecer un precio P^L el seguidor ofrecerá una cantidad igual a $S(P^L)$, éste puede determinar la demanda residual que enfrentará una vez deducida la producción del seguidor. En otras palabras, si el seguidor ofrece una cantidad $S(P^L)$ y la demanda de mercado es $D(P)$, entonces el líder enfrentará una **demanda residual** igual a $R(P) = D(P) - S(P)$. Es sobre esta porción de mercado (residual), donde el líder es la única empresa operando, por lo que su comportamiento óptimo será el de un monopolista. Para mantener las cosas simples, supongamos que el líder produce a un costo marginal constante e igual a c_L. Su problema se reduce a:

$$\max_{Q_r} \pi^L(Q_r) = P(Q_r)Q_r - C_L(Q_r) \tag{3.18}$$

donde $Q_r = R(P)$ es la demanda residual. La condición de primer orden para este problema es:

$$\frac{\delta \pi^L}{\delta Q_r} = P(Q_r) + \frac{\delta P(Q_r}{\delta Q_r} Q_r - c_L = 0 \tag{3.19}$$

es decir, para maximizar beneficios el líder debe igualar el ingreso marginal calculado sobre la demanda residual $R(P)$ a su costo marginal de producción. La representación gráfica de lo anterior corresponde a la figura (3.1).

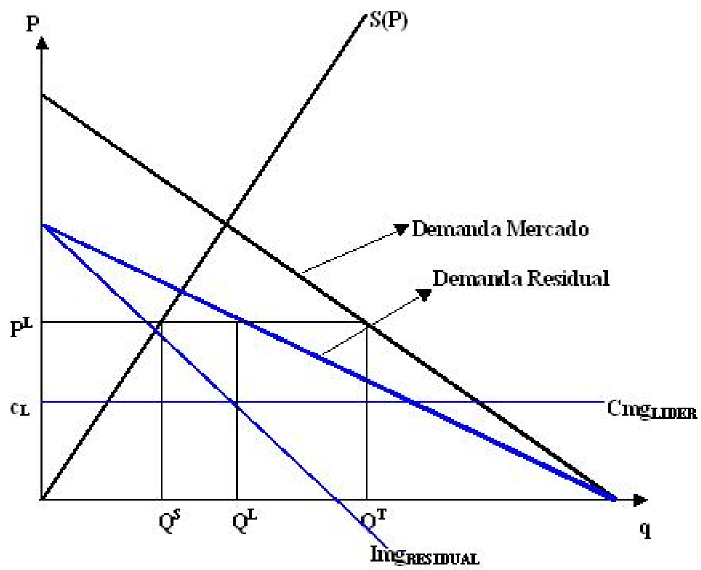

Figura 3.1: Líder–Seguidor en precios

Así, el equilibrio en el modelo líder–seguidor en precios será tal que P^L maximiza el beneficio del líder al considerar la demanda residual $R(P^L)$ **y** es igual al costo marginal de producción del seguidor. Si lo último no es satisfecho, el seguidor tendrá incentivos unilaterales a desviarse cobrando un precio distinto a P^L, por lo que la demanda residual $R(P^L)$ no será óptima implicando que P^L no es óptimo.

3.5. Colusión

Hasta el momento hemos considerado modelos de oligopolio donde las empresas actúan de manera no–cooperativa, es decir, solo actúan empujadas por la búsqueda del máximo beneficio individual. Sin embargo, usted se habrá dado cuenta que en muchas situaciones las empresas pueden obtener beneficios mayores si actúan de manera *cooperativa*. Para entender mejor este punto, suponga una industria formada por dos empresas que compiten *à la Cournot*. Suponga asimismo que la demanda de mercado es $P(Q) = a - bQ_t$, donde $Q_t = q_1 + q_2$. Para mayor simplicidad, suponga además que los costos marginales de ambas empresas son constantes e iguales a cero. La solución a este problema se encuentra determinando las funciones de reacción o mejor respuesta para cada empresa y solucionando el sistema de ecuaciones por ellas generado. En el presente caso, las funciones de reacción son:

$$q_1 = \frac{a - bq_2}{2b} \tag{3.20}$$

$$q_2 = \frac{a - bq_1}{2b} \tag{3.21}$$

Del sistema de ecuaciones formado por (3.20) y (3.21), las cantidades óptimas para cada firma son $q_i^* = \frac{a}{3b}$, $\forall i = 1, 2$. El precio de equilibrio en esta industria es $P = \frac{a}{3}$, por lo que el beneficio obtenido por cada una de las firmas será $\pi_i^* = \frac{a^2}{9b}$. Ahora suponga que ambas empresas acuerdan comportarse como un monopolio, dividiéndose en partes iguales el beneficio así obtenido. En este caso, la función de beneficio del *monopolio* será:

$$\pi^m(Q_t) = (a - bQ_t)Q_t \tag{3.22}$$

La cantidad y precio de equilibrio bajo estructura monopólica son iguales a $Q_t = \frac{a}{2b}$, $P = \frac{a}{2}$, por lo que el beneficio total del monopolio será $\pi^{m*} = \frac{a^2}{4b}$. Ahora bien, como cada empresa recibirá la mitad del beneficio total, tenemos que el beneficio para cada firma es igual a $\pi_i = \pi^{m*}/2 = \frac{a^2}{8b}$. Claramente, el beneficio obtenido cuando las empresas deciden comportarse como monopolio supera al obtenido al competir à la Cournot. Si esto es cierto, ¿por qué las empresas no deciden comportarse siempre como un monopolio o cartel? Antes de contestar a esta pregunta es necesario definir que entenderemos por cartel. Se entiende por cartel a aquella estructura industrial en donde las empresas escogen en conjunto el nivel de producción de la industria y tienen como objetivo maximizar el **beneficio total de la industria**. Básicamente, un cartel puede ser entendido como un monopolio multiplanta. Así, el objetivo del cartel será maximizar la suma de los beneficios individuales. En nuestro modelo de duopolio, la función objetivo del cartel será[5]:

$$\pi^c = \pi_1 + \pi_2 \tag{3.23}$$

Como $\pi_1 = P(q_1+q_2)q_1 - C_1(q_1)$ y $\pi_2 = P(q_1+q_2)q_2 - C_2(q_2)$, donde $P(q_1+q_2)$ es la función inversa de demanda, la función objetivo del cartel en (3.23) queda como sigue:

$$\pi^c = P(q_1+q_2)q_1 + P(q_1+q_2)q_2 - [C_1(q_1) + C_2(q_2)] \tag{3.24}$$

Asumiendo que las condiciones de segundo orden son satisfechas, las condiciones de primer orden para la determinación de un máximo en (3.24) son:

$$\frac{\delta \pi_1}{\delta q_1} = P(q_1+q_2) + \frac{\delta P}{\delta q_1}P(q_1+q_2) + \frac{\delta P}{\delta q_1}q_2 - Cmg_1(q_1) = 0 \tag{3.25}$$
$$\frac{\delta \pi_2}{\delta q_2} = P(q_1+q_2) + \frac{\delta P}{\delta q_2}P(q_1+q_2) + \frac{\delta P}{\delta q_2}q_1 - Cmg_2(q_2) = 0 \tag{3.26}$$

Observe algo sumamente interesante que se desprende de las ecuaciones (3.25) y (3.26). Por ejemplo, considere la primera de estas, es decir, la ecuación (3.25). Reordenando términos obtenemos,

$$P(q_1+q_2) + \frac{\delta P}{\delta q_1}P(q_1+q_2) - Cmg_1(q_1) = -\frac{\delta P}{\delta q_1}q_2 \tag{3.27}$$

Como hemos supuesto que la función de demanda de mercado tiene pendiente negativa, entonces debe necesariamente ser cierto que $\frac{\delta P}{\delta q_1} < 0$, por lo que el lado derecho de (3.27) debe ser mayor

[5]Véase Varian (1993).

a cero. Esto a su vez implica que el lado izquierdo de (3.27) es positivo, por lo que podemos concluir que $\frac{\delta\pi_1}{\delta q_1}$ es mayor a cero.

El resultado anterior ($\delta\pi_1/\delta q_1 > 0$) nos dice que, toda vez que la empresa 2 mantenga su nivel de producción constante en q_2, es rentable para la empresa 1 incrementar su producción, pues este incremento unilateral en q_1 significará un nivel de beneficios mayor para dicha empresa. De la misma forma como la empresa 1 observa que está en su propio interés incrementar unilateralmente su producción, la empresa 2 notará que dicho incentivo es también positivo para ella, por lo que se verá tentada a incrementar su propio nivel de producción. Lo anterior trae como consecuencia una de las caraterísticas más importantes del equilibrio de cartel: **su inestabilidad**. Como el equilibrio de cartel envuelve incentivos unilaterales a desviarse (claramente este *equilibrio* no corresponde a un equilibrio de Nash), si el cartel no diseña mecanismos tendientes a **detectar y castigar** el engaño de parte de sus miembros, dicho equilibrio no perdurará en el tiempo.

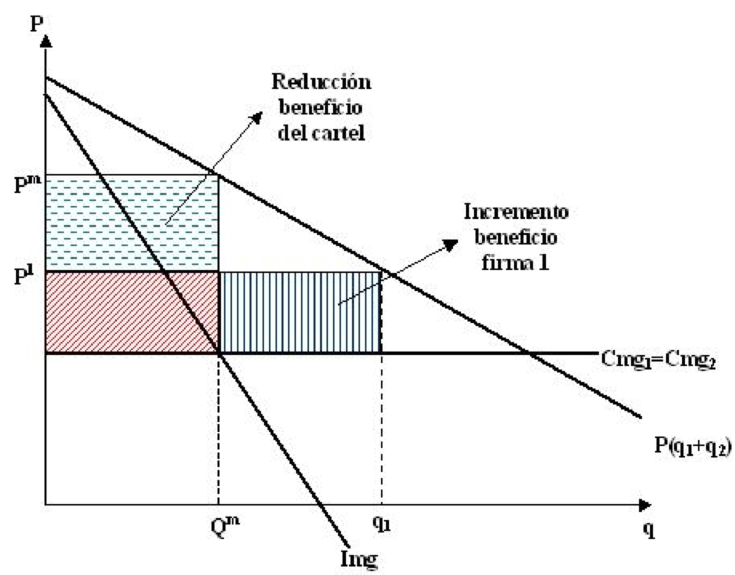

Figura 3.2: Inestabilidad del equilibrio de cartel

Podemos resumir diciendo que, dado el equilibrio colusivo o de cartel, cada firma observa los siguientes efectos cada vez que desea modificar unilateralmente su nivel de producción:

a) Por cada unidad extra vendida, la empresa i–ésima percibirá un ingreso neto adicional de

$P - Cmg_i$;

b) La venta de una unidad adicional implicará una *reducción* de su beneficio igual a $\frac{\delta P}{\delta q_1}q_1$, debido a la reducción del precio necesaria para inducir a los consumidores a consumir una unidad extra del bien. Dicha baja en el precio afectará no sólo a esta unidad adicional, sino que a todas las unidades anteriormente vendidas;

c) Aún cuando el efecto en a) domina al efecto en b) (por eso es que el incremento unilateral del nivel de producción reporta un aumento en el beneficio percibido por la **empresa i–ésima**), dicho incremento en q_i genera una *externalidad* al resto de las empresas participantes de la industria. El incremento en el nivel de producción de la empresa i implica una baja en el precio del bien **para todas las empresas de la industria**, por lo que el beneficio de todas las demás empresas participantes de este cartel (en nuestro caso la empresa restante) se verá **reducido** en $\frac{\delta P}{\delta q_1}q_2$.

Por lo tanto, es en beneficio del cartel impedir que las empresas, de manera individual, rompan el acuerdo y decidan incrementar su producción.

3.6. Modelo de competencia monopolística

Considere el mercado de las bebidas cola. Suponga que existe sólo una empresa productora de bebidas cola llamada Coca–Cola. Como Coca–Cola es una marca registrada, ninguna otra empresa puede producir esta bebida. Sin embargo, nada imposibilita a una empresa competidora producir una bebida similar a Coca–Cola, pero no idéntica. En general, habrá muchas empresas produciendo bebidas cola que, aun cuando son parecidas, poseen diferencias que las hacen sustitutos imperfectos para el consumidor. Lo anterior no es trivial, puesto que es la existencia de estos productos sustitutos lo que impide a Coca–Cola transformarse en un monopolio puro. Sin embargo, existe cierto grado de *poder de mercado* ejercido por la empresa productora de Coca–Cola toda vez que alzas en los precios no inducirán a **todos** los consumidores de Coca–Cola a dejar de consumirla. Por lo tanto, si bien Coca–Cola no es un monopolio puro, si enfrenta una demanda con **pendiente negativa** para su producto, lo que le otorga poder de mercado. Formalmente, el modelo de competencia monopolista hace uso de los siguientes supuestos:

1. Existen muchas empresas participando de la industria;

2. Cada empresa puede diferenciar su producto del de sus rivales. Esto es, muchas empresas producen bienes **similares** pero no **idénticos**;

3. Cada empresa toma el precio de sus rivales como dado. Así, las empresas participantes de esta industria ignoran el impacto de su precio sobre el precio cobrado por las restantes firmas de la industria;

4. No existen barreras de entrada o salida en esta industria.

De los anteriores supuestos podemos concluir que cada empresa participante de una industria competitivamente monopolística enfrenta la competencia de las demás firmas productoras de bienes sustitutos, pero actúa como si fuese un monopolista en su porción de mercado. Lo anterior se debe al hecho que para los consumidores, los bienes en esta industria corresponden a sustitutos imperfectos y por lo tanto, la elasticidad cruzada de éstos es menor a infinito. Así, si el competidor i–ésimo decide incrementar su precio con respecto al de las restantes firmas de la industria, solo **algunos** consumidores (los más sensibles al precio) decidirán abandonar la firma y cambiar de producto. Esto es, un alza en el precio implicará una disminución en la cantidad demanda de esta empresa, pero no sucederá (como es el caso de los bienes homogéneos) que la cantidad demandada pase de una cantidad estrictamente positiva a una cantidad igual a cero. Así, la empresa i–ésima enfrentará una demanda por su producto con pendiente negativa. Sabemos de nuestro análisis del monopolio que el hecho de que una empresa enfrente una demanda con pendiente negativa le otorga poder de mercado. Por lo tanto, en el corto plazo, el equilibrio para la empresa i–ésima vendrá dado por:

$$Img_i = P\left(1 + \frac{1}{1 + \epsilon_i}\right) = Cmg_i \tag{3.28}$$

donde ϵ_i corresponde a la elasticidad–precio de la demanda que enfrenta la empresa i–ésima y Cmg_i es el costo marginal de producción de la empresa i–ésima.

Ahora bien, supongamos que la empresa i–ésima está en equilibrio produciendo una cantidad q_i^* y cobrando un precio p^*. Además, suponga que para esta combinación precio–cantidad, la empresa obtiene beneficios económicos positivos. Estos beneficios positivos atraerán otras empresas que desearán sacar provecho de la rentabilidad ofrecida por esta industria. De acuerdo con el supuesto (2), (3) y (4), dichas empresas entrarán al mercado produciendo bienes similares pero no idénticos, *ceteris paribus*. La entrada de estas nuevas empresas tendrá dos efectos sobre la demanda de la empresa i–ésima:

1. La elasticidad–precio de la demanda enfrentada por la empresa i–ésima aumentará. Esto es, la demanda se hará más elastica producto de la existencia de un mayor número de bienes sustitutos disponibles en el mercado;

2. La porción de mercado correspondiente a la empresa i–ésima será menor. Esto obedece al hecho que la única forma que tienen los nuevos entrantes de tener mercado es *robándole* consumidores a la empresa i–ésima. Por esto, la demanda que enfrenta la empresa i será menor.

Dichos efectos perdurarán mientras existan beneficios positivos que sirvan de incentivo para atraer más empresas al mercado. No obstante, la entrada de un mayor número de empresas implicará que la demanda enfrentada por la empresa i–ésima será cada vez más elástica y menor. Este proceso de ajuste terminará cuando el beneficio para cada empresa participante de la industria sea igual a cero. De esta forma, el equilibrio de largo plazo queda descrito de la siguiente forma:

1. Cada firma debe vender una combinación precio–cantidad que se encuentre sobre la curva de demanda que ésta enfrenta;

2. Dada la curva de demanda que la empresa i–ésima enfrenta, ésta deberá maximizar sus beneficios;

3. La libre entrada y salida garantiza que los beneficios económicos de largo plazo deben ser iguales a cero.

Gráficamente, esta situación es descrita en la figura 3.3.

¿Qué caracteriza a este equilibrio? Básicamente, podemos decir que este equilibrio es ineficiente por dos motivos: a) el precio cobrado es mayor al costo marginal de producción (Cmg); b) la empresa(s) opera(n) a la izquierda del punto de costo medio mínimo de producción, lo cual involucra un *exceso de capacidad*. En palabras de Chamberlin (1933), estas ineficiencias (principalmente el exceso de capacidad) representan el *costo de variedad* que la sociedad debe enfrentar por tener una gama de productos diferenciados en el mercado. Sabemos que bajo competencia perfecta el equilibrio de largo plazo ocurre donde el costo medio mínimo es igual al

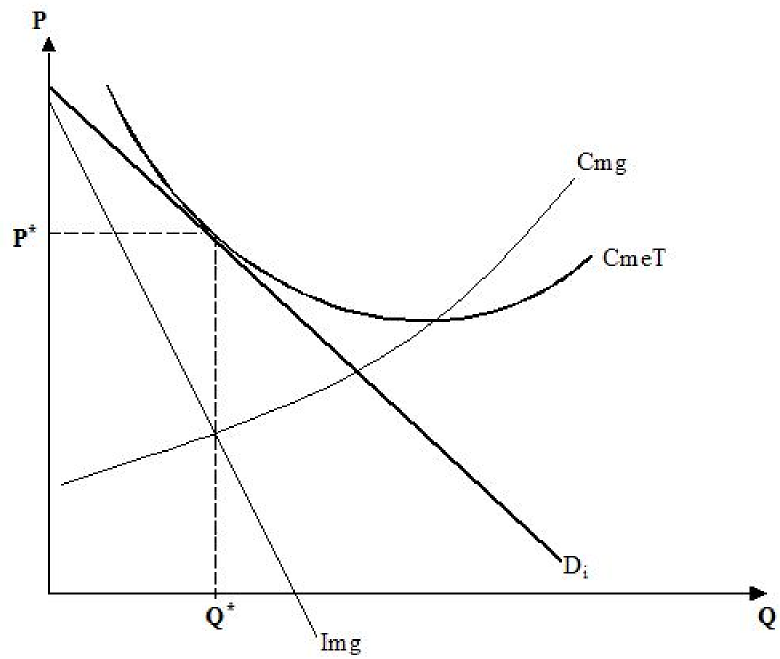

Figura 3.3: Equilibrio largo plazo competencia monopolística

precio, por lo que dicho exceso de capacidad es inexistente. No obstante, los productos en competencia perfecta son homogéneos. La solución propuesta por Chamberlin (1933) en su modelo de competencia monopolística plantea la existencia de un *trade–off* en términos de la variedad y exceso de capacidad en la producción de los bienes que los consumidores tienen a su disposición.

3.7. Diferenciación horizontal: el modelo de Hotelling

Existen algunos bienes para los cuales no existe consenso de cual es mejor y cual peor. La elección de estos bienes, en general, depende de algún atributo particular que es valorado por los consumidores de manera individual. Por ejemplo, una persona ubicada en Talca preferirá los bienes ubicados en las tiendas talquinas aun cuando estos bienes sean físicamente idénticos a los encontrados en Paris. Otro ejemplo de esto podría ser el color de un vehículo. Aun cuando el vehículo es físicamente el mismo, algunos consumidores preferirán un automóvil color rojo, mientras que otros los preferirán blancos. Por último, algunos consumidores preferirán tomar pisco sour con mucha azúcar, mientras que otros lo preferirán sin azúcar. En los ejemplos mencionados anteriormente, los productos se diferencian unos de otros en base a una característica particular. Podríamos decir que para algunos consumidores, el bien preferido es aquel que posee mucho de esa característica, mientras que para otros el preferido es aquel que posee muy poco de ella. En estos casos podemos hablar de diferenciación **horizontal** o **espacial**, puesto que no hay acuerdo en cual bien es más preferido por **todos** los consumidores. En otras palabras, bajo diferenciación horizontal no existen **buenos** ni **malos** bienes.

Un modelo muy simple que nos permite analizar este tipo de diferenciación es el llamado modelo de diferenciación horizontal de Hotelling (1929). Hotelling, por medio de una analogía, modeló un mercado donde los productos son diferenciados por medio de una característica. Consideremos el siguiente modelo. Suponga una ciudad lineal de longitud igual a 1 en la cual los consumidores se distribuyen uniformemente a lo largo de esta. Suponga además que existen dos tiendas que desean ubicarse en algún punto de esta ciudad. Suponga que la tienda 1 se ubica en el punto x_1 de dicha ciudad, mientras que la tienda 2 lo hace en el punto x_2. Si un consumidor ubicado en $x \neq x_1 \neq x_2$ desea ir a comprar a alguna de las dos tiendas, deberá incurrir en un costo de transporte de t por unidad de longitud. Así, si desea comprar en la tienda 1, el costo total de transporte en el que necesita incurrir será igual a $t|x-x_1|$. Análogamente, si desea comprar en la tienda 2, el costo total de transporte será igual a $t|x-x_2|$. Por último, supongamos que el consumidor obtiene una utilidad bruta de $\bar{s}$ si consume el bien y de 0 si no lo hace. Las tiendas 1 y 2 cargan precios iguales a p_1 y p_2 respectivamente.

Primero analicemos cual es la ubicación **socialmente óptima** para ambas empresas. Si suponemos que los costos de producción son constantes e iguales a cero[6], entonces un planificador central que decida la ubicación y los precios que cobra cada una de las tiendas ubicacará a las firmas de manera tal que el costo de transporte para cualquier consumidor sea el mínimo posible. Claramente, dicho objetivo se alcanza si las tiendas se ubican en $x_1 = 1/4$ y $x_2 = 3/4$, como lo muestra la figura (3.4) puesto que, para cualquier consumidor a lo largo de esta ciudad, el costo de transporte es mínimo.

Bajo este esquema, los consumidores ubicados a la izquierda de la tienda 1 siempre comprarán

[6]Los resultados que a continuación presentamos no se ven afectados si se supone que las empresas incurren en un costo constante e igual a c. El supuesto de costos de producción iguales a cero se hace con el objeto de simplificar el análisis.

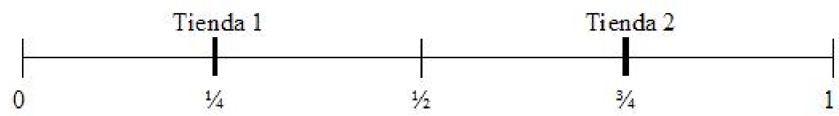

Figura 3.4: La ciudad lineal de Hotelling

en la tienda 1 y los ubicados a la derecha de la tienda 2 siempre lo harán en la tienda 2. Aquellos ubicados entre ambas tiendas se distribuirán equitativamente. Solo el consumidor ubicado en $x = 1/2$ estará indiferente entre comprar en la tienda 1 o en la tienda 2. Por lo tanto, ambas tiendas sirven al 50 % del mercado. Ahora bien, ¿es este par de ubicaciones el más conveniente desde el punto de vista de las tiendas? La respuesta es no. La razón es que cada tienda tiene incentivos a desviarse de estas ubicaciones a fin de captar una mayor proporción del mercado y así incrementar sus beneficios. Por ejemplo, supongamos que la tienda 1 decide ubicarse en $x_1 = 3/8$, es decir, decide moverse 1/8 hacia su derecha. Si la tienda 2 se mantiene en su ubicación inicial (i.e. $x_2 = 3/4$), la tienda 1 ganará 1/16 como porción de mercado extra. Esto es debido a que ahora el consumidor indiferente entre comprar en la tienda 1 y la tienda 2 se ubicará en $x = 9/16$ y no en $x = 1/2$. Como lo anterior es válido tanto para la tienda 1 como para la tienda 2, ésta verá en su propio interés moverse hacia la izquierda de su ubicación original (i.e. hacia la izquierda de $x_2 = 3/4$). Como cada vez que una tienda se traslade hacia el centro, su competidor hará lo mismo, ambas terminarán ubicándose en el mismo punto. Esto es, el proceso de traslado llevará a ambas tiendas a ubicarse en el medio de la ciudad, es decir, cuando $x_1 = x_2 = 1/2$.

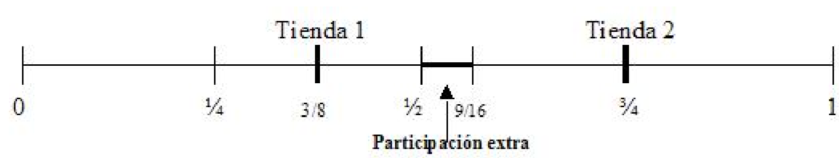

Figura 3.5: Los incentivos a desviarse de la ubicación socialmente óptima.

Lo anterior implica que las firmas siempre tendrán incentivos a ubicarse al centro de la ciudad minimizando así la diferencia entre ellas[7]. Esta característica fue bautizada como el **principio**

[7]Esta afirmación no es totalmente válida. En estricto rigor , si los costos de transporte son lineales en t no

de mínima diferenciación. Si nos abstraemos de la geometría de la ciudad y consideramos, por ejemplo, que la línea de longitud uno representa el grado alcohólico de alguna bebida, entonces el principio de mínima diferenciación nos dice que ambos tipos de bebidas terminarán con idéntico grado alcohólico. Es decir, ambas bebidas serán similares en lo que a grado alcohólico se refiere. Hotelling utilizó el grado de diferenciación de los candidatos presidenciales para ejemplificar su principio. Él argumentó que las diferencias entre el programa de un candidato u otro son casi siempre mínimas, por lo que el principio de mínima diferenciación aplica casi perfectamente. No obstante lo anterior, D'Aspremont et al. (1979) mostraron que el resultado propuesto por Hotelling contenía un error. Estos autores probaron que sólo para ciertas ubicaciones existe un equilibrio de Nash en precios. Más aún, ellos mostraron que para ubicaciones cercanas al centro, tal equilibrio no existe[8]. Para mostrar que los resultados obtenidos por Hotelling son dependientes de la geometría utilizada, D'Aspremont et al. utilizaron una función cuadrática en t (en vez de la lineal propuesta originalmente por Hotelling) para la cual la diferenciación entre las firmas era máxina y no mínima. Este principio fue bautizado como el principio de **máxima diferenciación**.

3.8. Diferenciación y publicidad

Sabemos que un mercado perfecto, la publicidad no tiene cabida toda vez que, por definición, todos los bienes producidos son exactamente iguales. Sin embargo, cuando la estructura de mercado no corresponde a una competitiva, la publicidad puede incrementar el beneficio de las firmas pues es posible inducir a los consumidores a consumir un producto en particular, incrementando la demanda por este producto. Dorfman and Steiner (1954) analizaron la siguiente pregunta, ¿cuál es el nivel óptimo de publicidad que deben hacer las empresas?. Para responder a esta pregunta, supongamos que los gastos en publicidad, S, afectan positivamente la demanda del producto ofrecido por la firma i. Así, si definimos como $Q = D(P, S)$ la demanda que enfrenta

existirá equilibrio de Nash en estrategias puras para todo x_1, $x_2 \in]1/4, 3/4[$. Para la comprobación de esto, véase D'Aspremont, Gabszewicz and Thisse (1979).

[8]Lo anterior es válido para equilibrios de Nash en estrategias puras. Para la existencia de equilibrios de Nash en estrategias mixtas, véase Osborne and Pitchik (1987) y Anderson (1988).

la firma i, entonces $\dfrac{\partial Q}{\partial S} > 0$. El problema de esta firma es,

$$\max_{P,S} \pi_i = PQ(P,S) - C[Q(P,S)] - S$$

donde, como ya se ha mencionado, S representa el nivel de gasto en publicidad realizado por la firma i. Las condiciones de primer orden para este problema son:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial P} = P\frac{\partial Q}{\partial P} + Q - \frac{\partial C}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial P} = 0 \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial S} = P\frac{\partial Q}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial S} - 1 = 0 \tag{3.30}$$

Reescribiendo (3.29) y (3.30) obtenemos,

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = P + \frac{P}{\frac{\partial Q}{\partial P}} \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial C}{\partial Q} = P - \frac{1}{\frac{\partial Q}{\partial S}} \tag{3.32}$$

Igualando (3.31) y (3.32), obtenemos la siguiente expresión,

$$\frac{Q}{\frac{\partial Q}{\partial P}} = -\frac{1}{\frac{\partial Q}{\partial S}} \tag{3.33}$$

Definamos,

$$\epsilon_p = -\frac{\partial Q}{\partial P}\frac{P}{Q} \tag{3.34}$$

$$\epsilon_s = \frac{\partial Q}{\partial S}\frac{S}{Q} \tag{3.35}$$

donde ϵ_s es el negativo de la elasticidad–precio de la demanda enfrentada por la empresa i y ϵ_s es la *elasticidad–publicidad*. Usando estas definiciones junto con la ecuación (3.33), obtenemos,

$$\frac{S}{PQ} = \frac{\epsilon_s}{\epsilon_p} \tag{3.36}$$

La igualdad en (3.36) es conocida como la **condición de Dorfman y Steiner**. Dicha condición nos señala que el nivel óptimo de publicidad como porcentaje de los ingresos totales de la firma estará determinado por el cuociente entre la sensibilidad de la demanda a la publicidad y al precio, medida por las elasticidades correspondientes. Para una aplicación de esta condición en relación a los gastos de Investigacón y Desarrollo, véase de Castro and Duch (2003).

Bibliografía

Anderson, S. P. (1988), 'Equilibrium Existence in the Linear Model of Spatial Competition', *Economica* **55**, 383–390.

Chamberlin, E. (1933), *The Theory of Monopolistic Competition*, Cambridge, Mass. Harvard University Press.

D'Aspremont, C., Gabszewicz, J. and Thisse, J. (1979), 'On Hotelling's "Stability in Competition"', *Econometrica* **47**(5), 1145–1149.

de Castro, J. and Duch, N. (2003), *Economía Industrial. Un enfoque estratégico*, McGraw Hill.

Dorfman, D. and Steiner, P. (1954), 'Optimal Advertising and Optimal Quality', *American Economic Review* pp. 826–836.

Fudenberg, D. and Tirole, J. (1991), *Game Theory*, The MIT Press.

Gibbons, R. (1992), *Game Theory for Applied Economist*, Princeton University Press.

Hotelling, H. (1929), 'Stability on Competition', *The Economic Journal* **39**, 41–57.

Nash, J. (1950), 'Equilibrium Points in n–Person Games', *Proceedings of the National Academy of Sciencies* **36**, 48–49.

Osborne, M. and Pitchik, C. (1987), 'Equilibrium in Hotelling's model of spatial competition', *Econometrica* **55**(4), 911–922.

Rasmusen, E. (1990), *Games and Information*, Basil Blackwell, Cambridge, Mass.

Shapiro, C. (1989), *Theories of Oligopoly Behavior*, Edited by R. Schmalensee and R.D. Willig. Elsevier Science Publishers, chapter 6 in Hanbook of Industrial Organization, Volume I.

Tirole, J. (1988), *The Theory of Industrial Organization*, The MIT Press.

Varian, H. (1993), *Intermediate Microeconomics. A modern Approach*, 3rd edn, W.W. Norton & Company.

Wolfstetter, E. (1999), *Topics in Microeconomics*, 1st edn, Cambridge University Press.